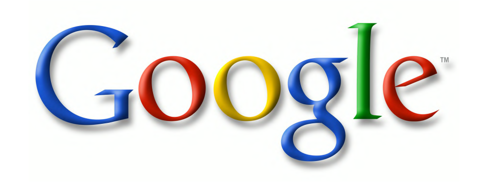

Google



[illegible] разложения в ряд
$(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \ldots (1-x^n)$.
[illegible]

[illegible]

THÉORIE

ÉLÉMENTAIRE

DES SÉRIES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,

[illegible] Quai des Grands-Augustins, 55.

THÉORIE

ÉLÉMENTAIRE

DES SÉRIES

LIMITES. — SÉRIES A TERMES CONSTANTS.
SÉRIES A TERMES VARIABLES. — FONCTION EXPONENTIELLE.
FONCTIONS CIRCULAIRES. — FONCTION GAMMA,

PAR

MAURICE GODEFROY,
BIBLIOTHÉCAIRE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE.

AVEC UNE PRÉFACE
DE

L. SAUVAGE,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

THÉORIE

ÉLÉMENTAIRE

DES SÉRIES

LIMITES. — SÉRIES A TERMES CONSTANTS.
SÉRIES A TERMES VARIABLES. — FONCTION EXPONENTIELLE.
FONCTIONS CIRCULAIRES. — FONCTION GAMMA,

PAR

MAURICE GODEFROY,
BIBLIOTHÉCAIRE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE,

AVEC UNE PRÉFACE

DE

L. SAUVAGE,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

PRÉFACE.

Les Traités élémentaires publiés en France sur la théorie des séries sont peu nombreux et déjà anciens : ils remontent à quarante ans environ. Depuis, des progrès considérables ont été réalisés dans cette branche des Mathématiques. M. Godefroy a pensé qu'il y aurait un réel intérêt à grouper les principaux résultats obtenus et à les présenter sous une forme aussi simple que possible. L'entreprise est louable; d'ailleurs, une analyse sommaire de ce Travail suffira pour en faire apprécier l'importance.

L'Auteur, dans le Chapitre I, définit d'une manière précise les notions de limite, de continuité et de dérivée, et rappelle celles de leurs conséquences dont il fera plus tard usage; la plupart ont été empruntées à l'*Analyse algébrique* de Cauchy; on ne saurait prendre un meilleur guide.

La théorie des séries à termes constants est ensuite exposée avec détails. Le théorème de Kummer, les règles de Cauchy, de Raabe et de Gauss sont démontrés avec une méthode et une clarté parfaites. A ces propositions générales succèdent des développements intéressants sur la convergence absolue et sur les séries de séries, dont les séries de Lambert et de Clausen forment une curieuse application.

Le Chapitre suivant est entièrement consacré aux séries à termes variables. L'Auteur, après avoir fait connaître les théorèmes relatifs à la convergence uniforme et à la continuité de ces séries, passe aux séries entières. Le théorème

d'Abel et ses importants corollaires sont établis avec toute la netteté désirable; des exemples bien choisis éclairent les passages délicats, puis vient un résumé substantiel des premières propriétés des polynômes de Legendre et de la série hypergéométrique. Le lecteur est ainsi conduit à la formule de Taylor considérée comme la généralisation naturelle du développement de l'accroissement de la somme $f(x)$ d'une série entière. Le rôle pratique de la série de Maclaurin est assez effacé, des procédés directs dispensant souvent d'y recourir; aucun de ceux dont l'emploi est le plus courant n'a été omis.

Le Chapitre IV traite avec ampleur de la fonction exponentielle. Aux méthodes ordinaires usitées pour déterminer la limite de l'expression $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ est préférée, à juste titre, celle de M. Darboux. Nous signalerons encore un abrégé instructif des propriétés des polynômes de Hermite, des fonctions de Bessel, des nombres et des polynômes de Bernoulli, puis la belle démonstration de la transcendance de e due à MM. Hurwitz et Gordan. La fonction a^x est définie à l'aide de l'exponentielle e^x, à l'inverse de la marche habituelle: on évite ainsi des longueurs à propos de la continuité de a^x. Euler et, après lui, Cauchy et Abel se sont servis de la relation fonctionnelle caractéristique de cette transcendante pour étendre la formule du binôme à un exposant irrationnel; la démonstration développée à ce sujet nous a semblé particulièrement simple. Ajoutons que cette étude de a^x est le préliminaire d'une théorie complète des logarithmes qui termine le Chapitre.

Les fonctions circulaires, introduites au moyen de définitions purement algébriques, font l'objet du Chapitre V. L'Auteur, s'inspirant des idées émises par M. Tannery dans son *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, déduit des développements en séries entières de $\cos x$ et de $\sin x$ toute la Trigonométrie. Il reproduit, pour prouver

l'irrationalité de π, l'ingénieux procédé donné par Hermite dans son Cours de la Sorbonne. Les développements en produits infinis, en séries entières ou en séries de fractions simples des différentes fonctions circulaires sont obtenus avec rigueur et facilité. Un paragraphe spécial renferme quelques indications sur les séries trigonométriques et l'exemple imaginé par Weierstrass d'une fonction continue non dérivable. Les fonctions circulaires inverses viennent ensuite, puis le calcul de π, son évaluation approchée, et enfin les fonctions hyperboliques généralement un peu négligées dans les Cours.

La fonction gamma se rattache étroitement par ses propriétés à la fonction exponentielle et aux fonctions circulaires. La considération du produit $\Pi(x)$ permet d'en exposer la théorie sans y faire intervenir la notion d'intégrale, grâce à l'emploi constant des séries; les raisonnements gagnent par là même en élégance et en uniformité. Dans le dernier Chapitre de son Traité, M. Godefroy, se plaçant à ce point de vue, établit sans peine les formules de Weierstrass, de Legendre, de Gauss, de Stirling et de Gudermann, ainsi que les développements en séries entières de $\log\Gamma(1+x)$ et de $\Gamma(1+x)$. Les démonstrations relatives aux séries de Binet et à la fameuse série de Stirling méritent d'attirer l'attention. Il y a lieu de remarquer aussi la forme nouvelle sous laquelle est présentée l'étude des fonctions de Prym et des transcendantes $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$.

Enfin, de nombreux exercices bien appropriés, et dus presque tous à des mathématiciens connus, accompagnent chacun des Chapitres. A la suite de ces exercices se trouve un petit index bibliographique des plus utiles à consulter.

Il convient maintenant de mettre en relief certaines des qualités distinctives de cet Ouvrage, la correction du style, le choix judicieux des notations, la rigueur irréprochable des raisonnements, l'originalité des idées. Les renseignements historiques et bibliographiques sont très abondants:

en général, leur exactitude a été contrôlée aux sources mêmes; ces références, presque toujours rejetées en note, complètent le texte sans l'encombrer. Le souci de la forme a été poussé très loin; ainsi, aucune égalité n'est numérotée; les démonstrations se développent sans que l'esprit soit astreint à se reporter continuellement en arrière.

La « Théorie élémentaire des séries » peut être lue sans difficulté par toutes les personnes qui possèdent les premiers principes du Calcul différentiel. Il n'y est point parlé d'imaginaires, mais il suffirait presque de substituer le terme « module » aux mots « valeur absolue » pour obtenir toute la généralité possible. Cet Ouvrage essentiellement pratique est bien propre à inspirer aux débutants le goût de l'Analyse et à leur ouvrir sur certains points des aperçus nouveaux. Il comprend, du reste, des matières qui figurent dans les programmes de concours et d'examens pour les grandes Écoles et les Certificats universitaires. Aussi, rendra-t-il d'incontestables services aux professeurs dans la préparation de leur Cours et aux élèves pour le perfectionnement de leurs études. Enfin, ceux-là même qui cultivent les Mathématiques pour l'unique satisfaction d'un penchant de leur esprit trouveront quelque agrément à feuilleter ces pages.

L. SAUVAGE.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES SÉRIES.

I.

LIMITES.

Nombres rationnels et nombres irrationnels. — La seule notion de *nombre entier* suffit à constituer l'Analyse ([1]); tous les autres nombres peuvent, en effet, être définis comme des groupes de nombres entiers, et toutes les opérations auxquelles on les assujettit comme des combinaisons des nombres entiers qui servent à les former. Du concept de nombre entier on déduit d'abord celui de *nombre fractionnaire*. Les nombres entiers et fractionnaires sont dits *commensurables,* ou mieux, *rationnels;* leur ensemble est illimité en grandeur et en petitesse, car on peut toujours trouver un nombre rationnel supérieur ou inférieur à tout autre nombre rationnel si grand ou si petit qu'il soit.

Les *nombres irrationnels* s'introduisent enfin de la manière suivante: soient deux suites de nombres entiers ou fractionnaires

$$a, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k, \quad \ldots,$$
$$b, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_k, \quad \ldots,$$

les premiers non décroissants, les seconds non croissants, vérifiant

([1]) « Autrefois, on partait d'un grand nombre de notions, regardées comme primitives, irréductibles et intuitives; telles étaient celles de nombre entier, de fraction, de grandeur continue, d'espace, de point, de ligne, de surface, etc. Aujourd'hui une seule subsiste, celle de nombre entier; toutes les autres n'en sont que des combinaisons, et à ce prix on atteint la rigueur parfaite ». (H. Poincaré). C'est à cette conception purement arithmétique de l'Analyse, dont Weierstrass fut l'initiateur, que Klein a donné le nom d'*Arithmetisirung der Mathematik*.

l'inégalité

$$a_k < b_k,$$

et tels que la différence

$$b_k - a_k$$

devienne de plus en plus petite, quand on prend k de plus en plus grand; deux cas peuvent se présenter : ou bien il y a toujours un même nombre rationnel compris entre a_k et b_k et il ne peut y en avoir qu'un, car s'il y en avait deux, A et B, on aurait

$$b_k - a_k > B - A,$$

de sorte que la différence $b_k - a_k$ ne serait plus arbitrairement petite, ou bien il n'y a jamais un même nombre rationnel compris entre a_k et b_k, et alors on dit que l'ensemble présente une *lacune* ou *coupure;* mais, lorsqu'il en est ainsi, on convient de considérer les deux suites comme définissant un nouveau nombre appelé *incommensurable*, ou mieux, *irrationnel.* Les nombres irrationnels se trouvent donc intercalés dans l'ensemble des nombres rationnels pour en combler les coupures [1]. On démontre, en Arithmétique [2], qu'ils jouissent de toutes les propriétés des nombres rationnels, le résultat d'une opération relative à des nombres irrationnels étant défini par la suite des résultats obtenus en effectuant la même opération sur des valeurs rationnelles de plus en plus approchées de ces nombres.

Les nombres rationnels ou irrationnels, positifs et négatifs, sont appelés *nombres réels;* ce sont les seuls que nous considérerons. La *valeur absolue* d'un tel nombre est sa valeur numérique indépendamment du signe; on la représente ordinairement en mettant le nombre entre deux barres verticales.

Un nombre est *algébrique* lorsqu'il est racine d'une équation algébrique dont le degré et les coefficients sont des nombres entiers; tout nombre qui n'est pas algébrique est *transcendant.*

---

(1) *Voir* JULES TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. VIII-X et 1-43. — LOUIS COUTURAT. *De l'Infini mathématique*, p. 52-68. La définition des nombres irrationnels que nous avons donnée est due à DEDEKIND (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*). Il en existe d'autres moins simples, qui ont été proposées par WEIERSTRASS, MÉRAY, G. CANTOR et HEINE.

(2) *Voir* JULES TANNERY, *Leçons d'Arithmetique théorique et pratique*, p. 378-433.

L'existence des nombres transcendants a été démontrée pour la première fois par Liouville [1].

Infiniment petit. — *Une variable x a pour limite zéro*, ou *tend vers zéro*, quand sa valeur absolue peut devenir et rester inférieure à tout nombre positif donné ρ, si petit qu'il soit, c'est-à-dire si la double inégalité

$$-\rho < x < \rho$$

peut être vérifiée, quelque petit que l'on prenne ρ; on dit alors que x est un *infiniment petit* [2]. Une constante très petite n'est pas un infiniment petit.

Lorsqu'on considère simultanément plusieurs infiniment petits, on en choisit un auquel on rapporte tous les autres; cet infiniment petit se nomme l'*infiniment petit principal*.

Un infiniment petit y est d'*ordre* n, en désignant par n un nombre positif, si son rapport à la puissance $n^{\text{ième}}$ de l'infiniment petit principal x peut être regardé comme la somme d'une constante non nulle λ et d'un infiniment petit ε tendant vers zéro en même temps que x, c'est-à-dire, si l'on a

$$y = x^n(\lambda + \varepsilon);$$

le produit λx^n est la *partie principale* de l'infiniment petit y.

Deux infiniment petits sont *équivalents* lorsqu'ils ont même partie principale; en particulier, un infiniment petit et sa partie principale sont deux infiniment petits équivalents.

Limite d'une variable. — *Une variable x a pour limite un nombre fini x_0* si la différence $x - x_0$ tend vers zéro, c'est-à-dire

---

(1) *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, t. XVIII, 1844, p. 883-885, 910-911, et *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XVI, 1851, p. 133-142.

(2) La notion d'infiniment petit fut pendant longtemps le sujet d'ardentes controverses entre les mathématiciens et elle a certainement contribué à propager bien des spéculations singulières ou erronées. Elle est cependant loin d'avoir l'importance exagérée qu'on lui attribuait jadis; en théorie, il est toujours possible de s'en passer. « La considération continuelle des infiniment petits, sous son apparence facile, le départ à faire entre ceux qui sont négligeables et les autres, etc., n'apporte guère à l'esprit que de la fatigue et de l'impatience, au raisonnement, que de la faiblesse... ». (CH. MÉRAY).

si la double inégalité

$$-\rho < x - x_0 < \rho$$

peut être vérifiée, quelque petit que l'on prenne le nombre positif ρ; on exprime alors que x_0 est la limite de x au moyen de la notation

$$\lim x = x_0,$$

ou bien en posant

$$x - x_0 = \varepsilon,$$

le nombre positif ou négatif ε étant compris entre $-\rho$ et $+\rho$ et, par suite, ayant zéro pour limite.

Limite d'une fonction. — Soit y une fonction d'une seule variable x, on peut distinguer les quatre cas suivants :

I. *La fonction y tend vers une limite y_0 pour $x = x_0$* si, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, on peut déterminer un nombre positif ρ tel que, pour toutes les valeurs de x satisfaisant à la double inégalité

$$-\rho < x - x_0 < \rho,$$

on ait

$$-\sigma < y - y_0 < \sigma.$$

Ainsi, x variant dans l'intervalle $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, la fonction y doit varier dans l'intervalle $(y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$.

Quand on choisit pour σ des nombres de plus en plus petits, ou bien les valeurs correspondantes trouvées pour ρ deviennent de plus en plus petites, ou bien elles ne tendent pas vers zéro en même temps que σ, et elles restent alors toujours supérieures à un certain nombre positif déterminé ρ_0; mais, la différence $y - y_0$ étant comprise entre $-\sigma$ et $+\sigma$, si petit que soit σ, pour toutes les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0)$, elle sera nécessairement comprise entre $-\sigma$ et $+\sigma$, pour toutes les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, en prenant ρ inférieur à ρ_0 et aussi petit que l'on veut; dans les deux cas les différences $x - x_0$ et $y - y_0$ tendent donc simultanément vers zéro.

On dit que *la fonction y tend vers la limite à droite ou la limite à gauche y_0 pour $x = x_0$* suivant que l'on a

$$-\sigma < y - y_0 < \sigma.$$

seulement pour les valeurs de x satisfaisant à l'une ou à l'autre des doubles inégalités

$$0 < x - x_0 < \rho, \qquad -\rho < x - x_0 < 0.$$

II. *La fonction y tend vers la limite y_0 pour* $x = \pm\infty$ si, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, on peut déterminer un nombre positif ρ tel que, pour toutes les valeurs de x satisfaisant à l'une ou à l'autre des inégalités

$$x > \frac{1}{\rho}, \qquad x < -\frac{1}{\rho},$$

on ait

$$-\sigma < y - y_0 < \sigma;$$

dans le premier cas $y = y_0$ pour $x = +\infty$, et dans le second $y = y_0$ pour $x = -\infty$. Ces inégalités signifient que, x variant dans l'intervalle $\left(\frac{1}{\rho}, +\infty\right)$ ou dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{\rho}, -\infty\right)$, la fonction y doit varier dans l'intervalle $(y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$.

Lorsqu'on adopte pour σ des nombres de plus en plus petits,[1] ou bien les valeurs correspondantes trouvées pour ρ deviennent de plus en plus petites,[2] ou bien elles ne tendent pas vers zéro en même temps que σ, et elles restent alors toujours supérieures à un certain nombre positif déterminé ρ_0; mais, la différence $y - y_0$ étant comprise entre $-\sigma$ et $+\sigma$, si petit que soit σ, pour toutes les valeurs de x supérieures à $\frac{1}{\rho_0}$ ou inférieures à $-\frac{1}{\rho_0}$, elle sera nécessairement comprise entre $-\sigma$ et $+\sigma$, pour toutes les valeurs de x supérieures à $\frac{1}{\rho}$ ou inférieures à $-\frac{1}{\rho}$, en prenant ρ inférieur à ρ_0 et aussi petit que l'on veut; dans les deux cas la différence $y - y_0$ tend donc vers zéro quand x croît ou décroît indéfiniment.

III. *La fonction y devient infinie pour $x = x_0$* si, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, on peut déterminer un nombre positif ρ tel que, pour toutes les valeurs de x satisfaisant à la double inégalité

$$-\rho < x - x_0 < \rho,$$

on ait

$$y > \frac{1}{\sigma} \qquad \text{ou} \qquad y < -\frac{1}{\sigma};$$

dans le premier cas, $y=+\infty$ pour $x=x_0$, et dans le second, $y=-\infty$ pour $x=x_0$. Ces inégalités expriment que, x variant dans l'intervalle $(x_0-\rho,\ x_0+\rho)$, la fonction y doit varier dans l'intervalle $\left(\frac{1}{\sigma},\ +\infty\right)$ ou dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{\sigma},\ -\infty\right)$.

On dit que *la fonction y devient infinie à droite ou infinie à gauche pour $x=x_0$* suivant que l'on a

$$y>\frac{1}{\sigma} \qquad \text{ou} \qquad y<-\frac{1}{\sigma},$$

seulement pour les valeurs de x satisfaisant à l'une ou à l'autre des doubles inégalités

$$0<x-x_0<\rho, \qquad -\rho<x-x_0<0.$$

IV. *La fonction y devient infinie pour $x=\pm\infty$* si, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, on peut déterminer un nombre positif ρ tel que l'un ou l'autre des quatre systèmes d'inégalités

$$\begin{array}{llll} x>\frac{1}{\rho}, & x>\frac{1}{\rho}, & x<-\frac{1}{\rho}, & x<-\frac{1}{\rho}, \\ y>\frac{1}{\sigma}, & y<-\frac{1}{\sigma}, & y>\frac{1}{\sigma}, & y<-\frac{1}{\sigma}, \end{array}$$

soit vérifié; dans le premier cas, $y=+\infty$ pour $x=+\infty$, dans le second $y=-\infty$ pour $x=+\infty$, dans le troisième $y=+\infty$ pour $x=-\infty$, et dans le quatrième $y=-\infty$ pour $x=-\infty$.

Les définitions précédentes s'étendent sans difficulté aux fonctions de plusieurs variables, en répétant pour chacune des variables les conditions énoncées dans le cas d'une seule.

Enfin, on démontre en Algèbre que, si deux fonctions ont des limites, leur somme, leur différence, leur produit et leur quotient ont aussi des limites respectivement égales à la somme, à la différence, au produit et au quotient des limites des fonctions. De même, si une fonction a une limite, une puissance rationnelle de cette fonction a une limite égale à la puissance correspondante de la limite de la fonction.

Lorsque les termes d'une somme tendent chacun vers une limite

quand leur nombre augmente indéfiniment, la somme n'a pas nécessairement pour limite la somme des limites des termes. Ainsi, la somme

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n},$$

dont le nombre des termes est égal à n, ne devient pas nulle pour $n = \infty$, puisqu'elle est constamment égale à l'unité.

Variante. — On appelle *variante* une fonction X_n d'un entier positif variable n qui est dit l'*indice* de la variante ([1]).

La variante X_n tend vers une limite X pour $n = \infty$ si, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, on peut déterminer un entier m tel que, à partir de $n = m$, on ait

$$-\sigma < X_n - X < \sigma.$$

Lorsque la différence $b_k - a_k$ de deux variantes b_k et a_k tend vers zéro pour $k = \infty$, la variante b_k, supposée non croissante, restant toujours supérieure à la variante a_k, supposée non décroissante, un même nombre rationnel ou irrationnel x_0 est toujours compris entre a_k et b_k; ce nombre x_0 est la limite commune des deux variantes. En effet, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, on peut déterminer un entier m tel que, à partir de $k = m$, on ait

$$-\sigma < b_k - a_k < \sigma,$$

mais, x_0 étant toujours compris entre a_k et b_k, on en déduit

$$-\sigma < a_k - x_0 < 0, \qquad 0 < b_k - x_0 < \sigma,$$

inégalités qui expriment que x_0 est la limite commune des variantes a_k et b_k. On voit, d'après cette remarque, comment la notion de nombre irrationnel se rattache à celle de limite.

Théorème. — *Si une variante X_n croît avec son indice, en restant toujours inférieure à une constante, elle a une limite inférieure ou au plus égale à ce nombre; de même, si une variante X_n décroît quand son indice augmente, en restant toujours supérieure à une constante, elle a une limite supérieure ou au moins égale à ce nombre.*

([1]) La notion de variante est due à Méray (*Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale*, p. 1).

Soient a l'une des valeurs de la variante X_n et b une constante qui lui reste toujours supérieure; si l'on partage l'intervalle (a, b) en m parties égales à $\frac{b-a}{m}$, parmi les moyens de la suite croissante

$$a, \quad a+\frac{b-a}{m}, \quad a+2\frac{b-a}{m}, \quad \ldots, \quad b,$$

il y en a nécessairement deux consécutifs :

$$a_1 = a + p\frac{b-a}{m}, \qquad b_1 = a + (p+1)\frac{b-a}{m},$$

entre lesquels la variante reste comprise dès qu'elle dépasse une certaine valeur et tels que l'on ait

$$a \leqq a_1 < b_1 \leqq b,$$
$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{m};$$

en opérant de même sur l'intervalle (a_1, b_1), on obtient encore deux moyens consécutifs :

$$a_2 = a_1 + p_1\frac{b_1-a_1}{m}, \qquad b_2 = a_1 + (p_1+1)\frac{b_1-a_1}{m},$$

entre lesquels la variante reste comprise dès qu'elle dépasse une valeur déterminée et tels que l'on ait

$$a \leqq a_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq b_1 \leqq b,$$
$$b_2 - a_2 = \frac{b-a}{m^2};$$

si l'on continue de la même manière, on forme deux suites de nombres :

$$a, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k, \quad \ldots,$$
$$b, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_k, \quad \ldots,$$

les premiers non décroissants, les seconds non croissants tels que l'on ait

$$a_k < b_k,$$
$$b_k - a_k = \frac{b-a}{m^k};$$

la différence $b_k - a_k$ tendant vers zéro lorsque k augmente indéfiniment, les deux suites ont une limite commune X; ce nombre X

est la limite de X_n. En effet, à partir d'une certaine valeur de n, on a

$$a_k < X_n < b_k,$$

d'où

$$a_k - X < X_n - X < b_k - X,$$

par suite, si l'on remplace X dans le premier membre par $b_k \geqq X$ et dans le second par $a_k \leqq X$, on obtient, à plus forte raison,

$$-\sigma < X_n - X < \sigma,$$

en désignant par σ la différence $b_k - a_k$ qui est aussi petite que l'on veut; la variante X_n a donc bien une limite X inférieure ou au plus égale à b.

On démontrerait de même que si une variante décroît quand son indice augmente, mais reste toujours supérieure à une constante, elle a une limite supérieure ou au moins égale à ce nombre.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variante X_n ait une limite, lorsque son indice devient infini, est que, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, on puisse déterminer un entier m tel que la double inégalité*

$$-\sigma < X_{n+p} - X_n < \sigma$$

soit vérifiée, à partir de $n = m$, pour toute valeur entière et positive de p.

I. *La condition est nécessaire.* — En effet, si la variante X_n tend vers une limite X pour $n = \infty$, quelque petit que l'on prenne un nombre positif σ, on peut déterminer un entier m tel que, à partir de $n = m$, on ait

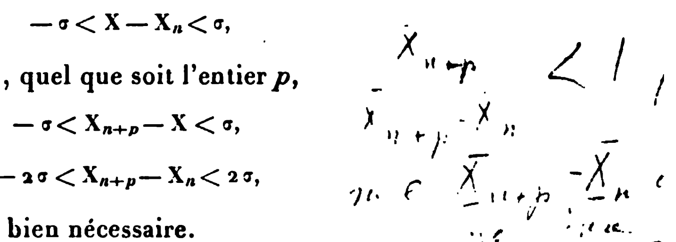
$$-\sigma < X - X_n < \sigma,$$

et, à plus forte raison, quel que soit l'entier p,

$$-\sigma < X_{n+p} - X < \sigma,$$

d'où

$$-2\sigma < X_{n+p} - X_n < 2\sigma,$$



la condition est donc bien nécessaire.

II. *La condition est suffisante.* — En effet si, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, on peut déterminer un même entier m tel que, pour toute valeur entière et positive de p,

ou encore

$$\frac{X_{m+p}}{m+p} > \frac{X_m}{m+p} + (\lambda - \sigma)\left(1 - \frac{m}{m+p}\right),$$
$$\frac{X_{m+p}}{m+p} < \frac{X_m}{m+p} + (\lambda + \sigma)\left(1 - \frac{m}{m+p}\right);$$

lorsque p augmente indéfiniment, les seconds membres de ces inégalités ont respectivement pour limites $\lambda - \sigma$ et $\lambda + \sigma$, on peut donc déterminer un même entier k tel que, à partir de $p = k$, on ait

$$\lambda - 2\sigma < (\lambda - \sigma)\left(1 - \frac{m}{m+p}\right) + \frac{X_m}{m+p},$$
$$\lambda + 2\sigma > (\lambda + \sigma)\left(1 - \frac{m}{m+p}\right) + \frac{X_m}{m+p};$$

il en résulte que, à partir de $n = m + k$, on a

$$\lambda - 2\sigma < \frac{X_n}{n} < \lambda + 2\sigma,$$

inégalités qui expriment que $\frac{X_n}{n}$ a pour limite λ.

Le théorème précédent est dû à Cauchy (¹); il est susceptible de généralisation.

Théorème. — *Si une variante* X_n *tend vers une limite pour* $n = \infty$, *le rapport*

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

tend vers la même limite.

Soit

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n;$$

lorsque n augmente indéfiniment, la différence

$$S_{n+1} - S_n = X_{n+1}$$

ayant une limite, d'après le théorème précédent l'expression $\frac{S_n}{n}$

(¹) *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique* (*Œuvres complètes*, 2ᵉ série, t. III, p. 54-58 et p. 62-63).

tend vers la même limite; le rapport

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

a donc bien, pour $n = \infty$, une limite égale à celle de X_n.

Théorème. — *Si le rapport* $\frac{X_{n+1}}{X_n}$ *de deux valeurs successives d'une variante positive* X_n *tend vers une limite pour* $n = \infty$, *le radical* $\sqrt[n]{X_n}$ *tend vers la même limite.*

En effet, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, si λ est la limite de $\frac{X_{n+1}}{X_n}$, on peut déterminer un entier m tel que, à partir de $n = m$, on ait

$$\lambda - \sigma < \frac{X_{n+1}}{X_n} < \lambda + \sigma,$$

et l'on peut écrire

$$\lambda - \sigma < \frac{X_{m+1}}{X_m} < \lambda + \sigma,$$

$$\lambda - \sigma < \frac{X_{m+2}}{X_{m+1}} < \lambda + \sigma,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\lambda - \sigma < \frac{X_{m+p}}{X_{m+p-1}} < \lambda + \sigma,$$

d'où

$$(\lambda - \sigma)^p < \frac{X_{m+p}}{X_m} < (\lambda + \sigma)^p,$$

ou encore

$$(\lambda - \sigma)\sqrt[m+p]{\frac{X_m}{(\lambda - \sigma)^m}} < \sqrt[m+p]{X_{m+p}} < (\lambda + \sigma)\sqrt[m+p]{\frac{X_m}{(\lambda + \sigma)^m}};$$

lorsque p augmente indéfiniment, les membres extrêmes de cette double inégalité ont respectivement pour limites $\lambda - \sigma$ et $\lambda + \sigma$, on peut donc déterminer un même entier k tel que, à partir de $p = k$, on ait

$$\lambda - 2\sigma < (\lambda - \sigma)\sqrt[m+p]{\frac{X_m}{(\lambda - \sigma)^m}},$$

$$\lambda + 2\sigma > (\lambda + \sigma)\sqrt[m+p]{\frac{X_m}{(\lambda + \sigma)^m}};$$

ou encore

$$\frac{X_{m+p}}{m+p} > \frac{X_m}{m+p} + (\lambda - \sigma)\left(1 - \frac{m}{m+p}\right),$$

$$\frac{X_{m+p}}{m+p} < \frac{X_m}{m+p} + (\lambda + \sigma)\left(1 - \frac{m}{m+p}\right);$$

lorsque p augmente indéfiniment, les seconds membres de ces inégalités ont respectivement pour limites $\lambda - \sigma$ et $\lambda + \sigma$, on peut donc déterminer un même entier k tel que, à partir de $p = k$, on ait

$$\lambda - 2\sigma < (\lambda - \sigma)\left(1 - \frac{m}{m+p}\right) + \frac{X_m}{m+p},$$

$$\lambda + 2\sigma > (\lambda + \sigma)\left(1 - \frac{m}{m+p}\right) + \frac{X_m}{m+p};$$

il en résulte que, à partir de $n = m + k$, on a

$$\lambda - 2\sigma < \frac{X_n}{n} < \lambda + 2\sigma,$$

inégalités qui expriment que $\frac{X_n}{n}$ a pour limite λ.

Le théorème précédent est dû à Cauchy [1]; il est susceptible de généralisation.

Théorème. — *Si une variante* X_n *tend vers une limite pour* $n = \infty$, *le rapport*

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

tend vers la même limite.

Soit

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n;$$

lorsque n augmente indéfiniment, la différence

$$S_{n+1} - S_n = X_{n+1}$$

ayant une limite, d'après le théorème précédent l'expression $\frac{S_n}{n}$

[1] *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique* (*Œuvres complètes*, 2e série, t. III, p. 54-58 et p. 62-63).

[illegible]

[illegible]

En effet [illegible]

à partir de [illegible]

et l'on peut écrire [illegible]

d'où [illegible]

on aura [illegible]

[illegible]

il en résulte que, à partir de $n = m + k$, on a

$$\lambda - 2\sigma < \sqrt[n]{X_n} < \lambda + 2\sigma,$$

inégalités exprimant que $\sqrt[n]{X_n}$ a λ pour limite.

Ce théorème a été donné par Cauchy [1]; sa réciproque n'est pas exacte, ainsi qu'on le verra plus loin à propos des séries (p. 35).

Application. — *Limite du radical* $\sqrt[n]{n}$ *pour* $n = \infty$. — Le rapport

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

tend vers l'unité pour $n = \infty$; il en est donc de même du radical $\sqrt[n]{n}$.

Puissance irrationnelle d'un nombre positif. — Soient a un nombre positif supérieur à l'unité et x un nombre irrationnel positif; on peut regarder ce nombre comme la limite d'une variante rationnelle croissante x_n; alors, si A est la valeur de a^x correspondant à une valeur approchée de x par excès, la variante a^{x_n}, restant toujours inférieure à A et croissant avec n, a nécessairement une limite λ, de sorte que, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, on peut déterminer un entier m tel que, à partir de $n = m$, on ait

$$-\sigma < a^{x_n} - \lambda < \sigma.$$

Cette limite λ ne change pas quelle que soit la variante qui définisse x; en effet, soit y_n une autre variante positive croissante ayant aussi x pour limite, la différence $y_n - x_n$ tend vers zéro, et si petit que l'on choisisse un nombre rationnel positif ρ, on peut prendre n suffisamment grand pour que, à partir de $n = m$, la double inégalité

$$-\rho < y_n - x_n < \rho$$

soit vérifiée, d'où

$$a^{x_n}(a^{-\rho} - 1) < a^{y_n} - a^{x_n} < a^{x_n}(a^{\rho} - 1),$$



[1] *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique* (**Œuvres complètes**, 2e série, t. III, p. 58-61 et p. 62-64).

et, à plus forte raison,

$$-A(a^\rho - 1) < a^{y_n} - a^{x_n} < A(a^\rho - 1);$$

or, la différence $a^\rho - 1$ tend vers zéro avec ρ; par suite, on peut choisir ρ assez petit pour que l'on ait

$$A(a^\rho - 1) < \sigma;$$

la double inégalité précédente devient alors

$$-\sigma < a^{y_n} - a^{x_n} < \sigma,$$

et ajoutée à la suivante

$$-\sigma < a^{x_n} - \lambda < \sigma,$$

elle donne

$$-2\sigma < a^{y_n} - \lambda < 2\sigma;$$

on en conclut que a^{y_n} a également pour limite λ. On arriverait au même résultat en supposant a inférieur à l'unité. C'est la limite λ, indépendante de la loi suivant laquelle varient les nombres rationnels qui définissent x, que l'on représente par a^x; la notion de puissance irrationnelle d'un nombre positif se trouve ainsi établie d'une manière précise.

Continuité.

Continuité d'une variable indépendante. — Une variable indépendante x est *continue dans un intervalle* (a, b) lorsque, croissant toujours de a jusqu'à b, elle passe successivement par toutes les valeurs rationnelles ou irrationnelles comprises entre a et b, en ne prenant chacune de ces valeurs qu'une fois; nous supposerons toujours la variable indépendante continue dans l'intervalle où elle varie.

Continuité d'une fonction. — Une fonction $f(x)$ est *continue pour* $x = x_0$ si elle a pour limite $f(x_0)$ pour $x = x_0$; soit alors σ un nombre positif arbitrairement petit, on peut déterminer un nombre positif ρ tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant la double inégalité

$$-\rho < x - x_0 < \rho,$$

on ait

$$-\sigma < f(x) - f(x_0) < \sigma.$$

La définition de la continuité se trouve, par suite, renfermée tout entière dans l'égalité

$$\lim f(x) = f(\lim x);$$

la possibilité de permuter les symboles lim et f est donc caractéristique de la fonction continue ([1]).

On désigne souvent, d'après Lejeune Dirichlet ([2]), par $f(x_0+0)$ et par $f(x_0-0)$ la limite à droite et la limite à gauche de $f(x)$ pour $x = x_0$; alors $f(x)$ est continue pour $x = x_0$, si l'on a

$$f(x_0+0) = f(x_0), \qquad f(x_0-0) = f(x_0).$$

La fonction $f(x)$ est *continue à droite* ou *continue à gauche pour* $x = x_0$ suivant que l'une ou l'autre seulement de ces égalités est vérifiée.

Une fonction $f(x)$ est *discontinue pour* $x = x_0$ lorsqu'elle n'est pas continue pour cette valeur de la variable, ce qui peut arriver quand pour $x = x_0$ elle devient infinie, ou indéterminée, ou encore tend vers des limites différentes suivant que l'accroissement $x - x_0$ devient nul par valeurs positives ou par valeurs négatives, c'est-à-dire si les limites

$$f(x_0+0), \quad f(x_0-0)$$

ne sont pas égales. Soit, par exemple, la fonction numérique

$$y = \mathrm{E}(x),$$

considérée pour la première fois par Legendre ([3]), le symbole $\mathrm{E}(x)$, qui s'énonce *entier de* x, représentant le plus grand entier contenu dans la variable x supposée toujours positive; lorsque x varie de 0 à 1, on a $y = 0$; lorsque x varie de 1 à 2, on a $y = 1$ et ainsi de suite. Cette fonction est discontinue pour toute valeur entière n de la variable; en effet

$$\mathrm{E}(n-0) = n-1, \qquad \mathrm{E}(n) = n, \qquad \mathrm{E}(n+0) = n.$$

La fonction $\mathrm{E}(x)$ présente un certain intérêt théorique, car elle permet de construire des fonctions jouissant de propriétés singu-

---

([1]) ERNESTO CESÀRO, *Corso di Analisi algebrica*, p. 194.
([2]) *G. Lejeune Dirichlet's Werke*, t. I, p. 156.
([3]) *Théorie des nombres*, 3e édition, t. I, p. 10.

lières; si l'on considère, par exemple, la fonction

$$y = \frac{1 - E\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{x + E\left(\frac{1}{1+x^2}\right)},$$

on voit que cette fonction est égale à $\frac{1}{x}$ pour toute valeur non nulle de x et égale à o pour $x = 0$, elle est, par suite, finie pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle $(0, 1)$ et cependant elle n'est pas limitée supérieurement dans cet intervalle; car, quelque grand que l'on prenne un nombre A, on peut donner à x une valeur assez petite pour que y surpasse A. Cette fonction n'est pas continue pour $x = 0$.

On dit qu'une fonction $f(x)$ est *continue dans un intervalle* (a, b) quand elle est continue pour toutes les valeurs de x intérieures à cet intervalle et que de plus elle est au moins continue à droite pour $x = a$ et continue à gauche pour $x = b$.

Enfin, une fonction $f(x)$ est *continue dans le voisinage de la valeur* x_0 *de* x lorsqu'elle est continue dans l'intervalle $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, quelque petit que l'on prenne le nombre positif ρ.

En résumé et d'une manière générale, une fonction $f(x)$ est continue si l'accroissement de la fonction tend vers zéro en même temps que l'accroissement de la variable.

Théorème. — *Une fonction* $f(x)$ *continue dans un intervalle* (a, b) *s'annule au moins pour une valeur de* x *comprise dans cet intervalle, si* $f(a)$ *et* $f(b)$ *sont de signes contraires.*

Les nombres $f(a)$ et $f(b)$ étant de signes contraires, soient pour préciser

$$f(a) < 0, \qquad f(b) > 0;$$

si l'on partage l'intervalle (a, b) en m parties égales à $\frac{b-a}{m}$, parmi les moyens de la suite croissante

$$a, \quad a + \frac{b-a}{m}, \quad a + 2\frac{b-a}{m}, \quad \ldots, \quad b,$$

ou bien il y en a un qui annule $f(x)$, ou bien il y en a deux néces-

sairement consécutifs :

$$a_1 = a + p\,\frac{b-a}{m}, \qquad b_1 = a + (p+1)\,\frac{b-a}{m},$$

tels que l'on ait

$$f(a_1) < 0, \qquad f(b_1) > 0,$$
$$a \leq a_1 < b_1 \leq b,$$
$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{m};$$

en opérant de même sur l'intervalle (a_1, b_1), dans le cas où aucun des nouveaux moyens ainsi obtenus n'annule $f(x)$, il y en a encore deux consécutifs :

$$a_2 = a_1 + p_1\,\frac{b_1-a_1}{m}, \qquad b_2 = a_1 + (p_1+1)\,\frac{b_1-a_1}{m},$$

tels que l'on ait

$$f(a_2) < 0, \qquad f(b_2) > 0,$$
$$a \leq a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \leq b,$$
$$b_2 - a_2 = \frac{b-a}{m^2};$$

si l'on continue de la même manière, ou bien on trouve un nombre qui annule $f(x)$, ou bien on forme deux suites de nombres

$$a, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots,$$
$$b, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots,$$

les premiers non décroissants, les seconds non croissants tels que l'on ait

$$f(a_k) < 0, \qquad f(b_k) > 0,$$
$$a_k < b_k,$$
$$b_k - a_k = \frac{b-a}{m^k};$$

la différence $b_k - a_k$ tendant vers zéro lorsque k augmente indéfiniment, les deux suites ont une limite commune x_0, et comme x_0 appartient à l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ est continue pour $x = x_0$; par suite, $f(a_k)$ a pour limite $f(x_0)$, mais $f(a_k)$ est toujours négative, sa limite $f(x_0)$ est donc négative ou nulle; de même $f(b_k)$ a pour limite $f(x_0)$ et puisque $f(b_k)$ est toujours positive, sa limite $f(x_0)$ est positive ou nulle. Or, le nombre déterminé $f(x_0)$ ne peut être à la fois positif et négatif; il en résulte qu'il est nul.

Une fonction continue s'annule donc en changeant de signe. Cette propriété, longtemps considérée comme évidente, a été démontrée pour la première fois d'une manière rigoureuse par Cauchy dans une Note de son *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique* (¹).

Théorème. — *Une fonction $f(x)$ continue dans un intervalle (a, b) passe par toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ lorsque x varie de a à b.*

En effet, soit y_0 un nombre déterminé quelconque compris entre $f(a)$ et $f(b)$; si l'on considère la fonction $\varphi(x) = f(x) - y_0$, elle est continue dans l'intervalle (a, b), et de plus les nombres

$$\varphi(a) = f(a) - y_0, \qquad \varphi(b) = f(b) - y_0$$

sont de signes contraires puisque y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$; il existe donc, d'après le théorème précédent, au moins une valeur x_0 de x intérieure à l'intervalle (a, b) telle que l'on ait $\varphi(x_0) = 0$, c'est-à-dire

$$f(x_0) = y_0.$$

La réciproque n'est pas exacte; une fonction susceptible de varier d'une valeur à une autre, en passant par toutes les valeurs intermédiaires, n'est pas nécessairement continue. Il existe, en effet, des fonctions discontinues qui remplissent cette condition. La propriété qui vient d'être établie n'est donc pas caractéristique des fonctions continues comme on le croyait jadis (²).

Fonction dérivable. Dérivée et différentielle. — Une fonction $f(x)$ est *dérivable pour $x = x_0$* si le rapport

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(¹) *Œuvres complètes*, 2ᵉ série, t. III, p. 378-380. Cette Note, observe Darboux, est extrêmement remarquable, surtout si l'on se reporte à l'époque où elle a été écrite.

(²) *Voir* G. Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues*, dans les *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 2ᵉ série, t. IV, 1875, p. 109.

a une limite λ pour $x = x_0$; soit alors σ un nombre positif arbitrairement petit, on peut déterminer un nombre positif ρ tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant la double inégalité

$$-\rho < x - x_0 < \rho,$$

on ait

$$\lambda - \sigma < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \lambda + \sigma.$$

Cette limite λ est la *dérivée de $f(x)$ pour $x = x_0$*.

Une fonction $f(x)$ est *dérivable à droite* ou *dérivable à gauche pour $x = x_0$* suivant que le rapport des accroissements n'a qu'une limite à droite ou qu'une limite à gauche pour $x = x_0$; cette limite est dite la *dérivée à droite* ou la *dérivée à gauche de $f(x)$ pour $x = x_0$*.

Une fonction $y = f(x)$ est *dérivable dans un intervalle (a, b)* quand elle est dérivable pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b et que, en outre, elle admet au moins une dérivée à droite pour $x = a$ et une dérivée à gauche pour $x = b$. Lorsqu'il en est ainsi, l'ensemble des dérivées de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) constitue une fonction de x que l'on représente par y' ou $f'(x)$; cette fonction est la *dérivée* de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b). Si l'on appelle alors Δy l'accroissement de la fonction y correspondant à un accroissement Δx de la variable x, on peut poser

$$\Delta y = (y' + \varepsilon)\Delta x,$$

le nombre positif ou négatif ε tendant vers zéro en même temps que Δx.

La *différentielle* (¹) d'une fonction dérivable $y = f(x)$ est le produit de la dérivée de cette fonction par l'accroissement infiniment petit de la variable dx ; on la désigne par dy ou df, de sorte que

$$dy = y'dx;$$

il résulte de là que la dérivée d'une fonction $y = f(x)$ peut être

(¹) La notion de différentielle est, au point de vue de la théorie pure, absolument superflue. C'est, du moins, l'opinion des analystes contemporains et entre autres de Harnack, Stolz, Poincaré.... Aussi bien, d'Alembert avait déjà émis la même idée.

représentée par le quotient

$$\frac{dy}{dx},$$

c'est la notation différentielle de la dérivée inventée par Leibniz; on en fait constamment usage en Analyse. Les symboles y' ou $f'(x)$ et $D_x y$, que l'on emploie souvent aussi, sont dus : les deux premiers à Lagrange et le troisième à Cauchy.

La différentielle est la partie principale de l'accroissement de la fonction correspondant à un accroissement infiniment petit de la variable.

En effet,

$$\Delta y = (y' + \varepsilon)\Delta x;$$

en désignant par dx l'accroissement Δx supposé infiniment petit, la partie principale de Δy est donc bien

$$dy = y'\,dx.$$

Théorème. — *Une fonction dérivable dans un intervalle (a, b) est continue dans cet intervalle.*

En effet, soient x et x_0 deux valeurs de la variable intérieures à l'intervalle (a, b), et λ la dérivée de la fonction $f(x)$ pour $x = x_0$; on a

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(\lambda + \varepsilon);$$

quand x tend vers x_0, la variable ε devenant nulle, il existe nécessairement une constante positive α à laquelle elle reste toujours inférieure en valeur absolue; par conséquent, β étant la valeur absolue de λ, si σ désigne un nombre positif arbitrairement petit, il suffit de déterminer un nombre positif ρ par la condition

$$\rho < \frac{\sigma}{\alpha + \beta},$$

pour que, x vérifiant la double inégalité

$$-\rho < x - x_0 < \rho,$$

on ait

$$-\sigma < f(x) - f(x_0) < \sigma,$$

la fonction $f(x)$ est donc continue pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b; de même, on déduit de ce qu'elle est dérivable dans cet intervalle

$$f(a + 0) = f(a), \qquad f(b - 0) = f(b),$$

par suite la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b).

Ainsi, pour démontrer qu'une fonction est continue, il suffit d'établir qu'elle est dérivable.

Toute fonction dérivable est continue, mais toute fonction continue n'est pas dérivable. En effet, malgré les tentatives faites par Ampère [1], Duhamel [2], Lamarle [3], Gilbert [4], les travaux des analystes allemands et notamment de Riemann [5], de Hankel [6], de Weierstrass [7] et de Schwarz [8] ont établi d'une manière irréfutable que certaines fonctions définies par des séries uniformément convergentes sont dépourvues de dérivées. On peut se reporter pour l'étude détaillée de cette question au brillant exposé qui en a été fait par Darboux dans son *Mémoire sur les fonctions discontinues* [9].

EXERCICES.

1° L'expression

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}$$

où a désigne un nombre positif, tend vers une limite; calculer cette limite.

JACQUES BERNOULLI.

2° Soient a et b deux nombres positifs, si l'on pose

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad b_1 = \sqrt{ab},$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \qquad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(1) *Journal de l'École polytechnique*, 13e cahier, 1806, p. 148.

(2) *Éléments de Calcul infinitésimal*, éd. J. Bertrand, t. I, p. 98-103.

(3) *Mémoires de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, in-4°, t. XXIX, 1855.

(4) *Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, in-8°, t. XXIII, 1873.

(5) *Œuvres mathématiques*, trad. L. Laugel, p. 225-279.

(6) *Mathematische Annalen*, t. XX, 1882, p. 63-112.

(7) *Mathematische Werke*, t. II, p. 71-74 et 228-230.

(8) *Archives des Sciences physiques et naturelles*, t. XLVIII, 1873, p. 33-38.

(9) *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 2e série, t. IV, 1875, p. 57-112.

faire voir que les nombres a_n et b_n ont une limite commune pour $n = \infty$. Cette limite s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique* des nombres a et b.

GAUSS.

3° Soit u_n le terme de rang $n+1$ de la suite

$$0,\quad 1,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 8,\quad 13,\quad \ldots;$$

établir la relation

$$u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n;$$

et chercher la limite du rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$


ALBERT GIRARD.

4° Quelle est la limite de l'expression

$$\sqrt[n]{\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{1.2.3\ldots n}}$$

pour $n = \infty$?

CHRYSTAL.

5° Que devient le radical

$$\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}$$

pour $n = \infty$?

CAUCHY.

6° Soient a_n et b_n deux variantes qui tendent vers zéro pour $n = \infty$ et dont la seconde est constamment décroissante; si le rapport $\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$ a une limite quand n augmente indéfiniment, le rapport $\frac{a_n}{b_n}$ a la même limite.

CESÀRO.

7° Démontrer que la fonction suivante

$$\varphi(x) = \mathrm{E}(x) + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$$

est continue pour toute valeur de x et vérifie la relation

$$\varphi(x) < x + \frac{1}{4}.$$

SCHWARZ.

8° Quelle est la forme générale d'une fonction continue $f(x)$ telle que, pour deux valeurs quelconques de la variable a et b, on ait

$$f(a+b) = f(a) + f(b).$$

CAUCHY.

9° La fonction

$$x - E(x)$$

est-elle dérivable ?

WEIERSTRASS.

10° Soit $\varphi(x)$ une fonction de la variable réelle x, continue pour toute valeur de cette variable. On suppose que la valeur absolue de la dérivée $\varphi'(x)$ est, pour toute valeur de x, moindre qu'un nombre k inférieur à l'unité :

a. Montrer que l'équation

$$x - \varphi(x) = 0$$

a *une* et *une seule* racine réelle a :

b. On forme la suite

$$x_1 = \varphi(x_0), \qquad x_2 = \varphi(x_1), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi(x_{n-1}),$$

où x_0 est une quantité réelle arbitrairement choisie. Montrer que x_n tend vers la racine a quand n devient infini.

Concours général de Mathématiques spéciales.

BIBLIOGRAPHIE.

CESÀRO (Ernesto), Corso di Analisi algebrica. Torino, Bocca, 1894, in-8°, p. 79-116, 184-230.

COUTURAT (Louis), De l'Infini mathématique (Thèse). Paris, Alcan, 1896, in-8° p. 52-68.

JORDAN (C.), Cours d'Analyse de l'École polytechnique, 2° édit. Paris, Gauthier-Villars, 1893, in-8°, t. I, p. 1-68.

TANNERY (Jules), Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Paris, Hermann, 1886, in-8°, p. 1-43, 99-131, 217-267.

TANNERY (Jules), Leçons d'Arithmétique théorique et pratique. Paris, Colin, 1894, in-8°, p. 378-433.

II.

SÉRIES A TERMES CONSTANTS.

Une *série* est une suite illimitée de nombres se succédant d'après une loi déterminée; ces nombres sont les *termes* de la série, on les représente par u_1, u_2, ..., u_n...; le terme u_n se nomme le *terme général*. On désigne par S_n la somme des n premiers termes, de sorte que

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

ce que l'on écrit aussi

$$S_n = \sum_{p=1}^{p=n} u_p.$$

C'est Newton qui le premier reconnut l'importance de la méthode des séries comme instrument d'investigation mathématique. Il en réunit les principaux résultats en 1669 dans un opuscule intitulé *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* (¹).

Série convergente. — Une série est *convergente* si la somme de ses n premiers termes S_n tend vers une limite S, quand n devient infini, cette limite s'appelle la *somme* de la série; soit alors σ un nombre positif arbitrairement petit, on peut déterminer un entier m tel que, à partir de $n = m$, on ait

$$-\sigma < S_n - S < \sigma;$$

la différence $S - S_n$ est le *reste* R_n limité au $n^{\text{ième}}$ terme; il tend vers

(¹) Newton avait alors vingt-six ans. L'*Analysis per aequationes* ne fut imprimée qu'en 1704. Mais dès 1669, l'un des maîtres de Newton, Barrow, et, par son intermédiaire, divers mathématiciens anglais en avaient eu connaissance.

Sommation d'une série. — La *sommation* d'une série est la recherche de la somme de ses n premiers termes; il n'existe pas de méthode générale permettant de l'effectuer, et l'on est presque toujours obligé de recourir à des artifices de calcul.

L'un des procédés élémentaires les plus employés consiste à mettre le terme général sous la forme d'une différence, de manière à ramener la sommation à celle de la série

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + \ldots.$$

Soit, par exemple, la série

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \ldots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} + \ldots,$$

étudiée par Stirling [1]; on a

$$\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1};$$

par conséquent, la série proposée peut s'écrire

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}\right) + \ldots,$$

d'où

$$S_n = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n},$$

la série est donc convergente et sa somme a pour expression

$$S = \frac{1}{x}.$$

Si l'on fait $x = 1$, on obtient

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots,$$

résultat dû à Brouncker.

THÉORÈME. — *La série obtenue en ajoutant ou en retranchant deux à deux les termes de deux séries convergentes est convergente et a pour somme la somme ou la différence des sommes des deux séries.*

[1] *Methodus differentialis sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum.* Londini, 1730.

Soient S_n, T_n les sommes des n premiers termes de deux séries convergentes et S, T leurs sommes, on peut déterminer un entier m tel que, à partir de $n = m$, on ait, en désignant par σ un nombre positif arbitrairement petit,

$$-\frac{\sigma}{2} < S_n - S < \frac{\sigma}{2},$$

$$-\frac{\sigma}{2} < T_n - T < \frac{\sigma}{2},$$

d'où

$$-\sigma < (S_n + T_n) - (S + T) < \sigma;$$

de même, après avoir changé les signes de la seconde des doubles inégalités, on trouve

$$-\sigma < (S_n - T_n) - (S - T) < \sigma;$$

la série obtenue en ajoutant ou en retranchant deux à deux les termes des séries de sommes respectives S et T est donc convergente et a pour somme $S + T$ ou $S - T$.

Théorème. — *Le terme général u_n d'une série convergente a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment.*

Soient S_n la somme des n premiers termes d'une série convergente et S sa limite, quelque petit que l'on prenne un nombre positif σ, on peut déterminer un entier m tel que, à partir de $n = m$, on ait

$$-\frac{\sigma}{2} < S \;- S_{n-1} < \frac{\sigma}{2},$$

$$-\frac{\sigma}{2} < S_n - S < \frac{\sigma}{2},$$

d'où

$$-\sigma < u_n < \sigma,$$

la limite de u_n est donc zéro.

Ainsi, une série dont le terme général ne tend pas vers zéro n'est pas convergente, mais le terme général d'une série peut tendre vers zéro sans que la série soit convergente ; par exemple, le terme général $\frac{1}{n}$ de la série harmonique devient nul pour $n = \infty$, et cependant cette série est divergente.

La condition énoncée est donc nécessaire, mais elle n'est pas suffisante.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série soit convergente, est que, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, on puisse déterminer un entier m tel que la somme S_n des n premiers termes vérifie la double inégalité*

$$-\sigma < S_{n+p} - S_n < \sigma,$$

à partir de $n = m$, pour toute valeur entière et positive de p.

En effet, la condition énoncée est la condition nécessaire et suffisante pour que la variante S_n ait une limite (p. 9).

Ce théorème n'a d'ailleurs qu'une importance toute théorique, car il est généralement impossible de l'appliquer. Toutefois, il n'en est pas ainsi dans l'exemple suivant que nous donnons d'après Abel (¹) :

Soit

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \ldots$$

une série divergente à termes positifs, s_n désignant la somme de ses n premiers termes, le théorème précédent permet d'établir que la série

$$\frac{1}{a_1 s_1} + \frac{1}{a_2 s_2} + \ldots + \frac{1}{a_n s_n} + \ldots$$

est aussi divergente. En effet, si S_n est la somme des n premiers termes de cette dernière série, on a

$$S_{n+p} - S_n \geqq \left(\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \ldots + \frac{1}{a_{n+p}}\right)\frac{1}{s_{n+p}},$$

c'est-à-dire

$$S_{n+p} - S_n \geqq 1 - \frac{s_n}{s_{n+p}};$$

Or, pour chaque valeur de n, on peut déterminer une valeur p_n p suffisamment grande pour que s_{n+p} surpasse $2s_n$, alors on a

$$S_{n+p} - S_n > \frac{1}{2};$$

(¹) uvres complètes, éd. L. Sylow et S. Lie, t. [illegible], p. [illegible].

il est donc impossible de déterminer un même entier m tel que, à partir de $n = m$, la différence $S_{n+p} - S_n$ soit arbitrairement petite, pour toute valeur entière et positive de p; de là résulte la divergence de la seconde série.

Séries positives.

Une série *positive* est celle dont les termes sont positifs, au moins à partir d'un certain rang. Une série positive qui n'est pas convergente est nécessairement divergente.

Théorème. — *Une série positive est convergente quand la somme de ses n premiers termes reste toujours inférieure à une constante.*

En effet, si la somme des n premiers termes de la série reste toujours inférieure à une constante, comme elle finit par devenir sans cesse croissante, puisque les termes sont positifs au moins à partir d'un certain rang, elle a nécessairement une limite égale ou inférieure à ce nombre (p. 7) et par suite la série est convergente.

Théorème. — *Une série positive reste convergente quand on multiplie ses termes par des nombres positifs tous inférieurs à une constante.*

En effet, soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ des nombres positifs tous inférieurs à une constante A, et u_n le terme général d'une série convergente de somme S, on a

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n < AS;$$

la série de terme général $a_n u_n$ est donc convergente, d'après le théorème précédent.

Théorème. — *Une série positive est convergente quand ses termes sont inférieurs aux termes correspondants d'une série positive convergente; elle est divergente quand ses termes sont supérieurs aux termes correspondants d'une série positive divergente.*

Soient S_n et T_n les sommes des n premiers termes de deux séries positives; si la première a chacun de ses termes inférieur au terme correspondant de la seconde supposée convergente, elle est

elle-même convergente, car S_n reste toujours inférieur à T_n et par suite à sa limite T; au contraire, si la première série a chacun de ses termes supérieur au terme correspondant de la seconde supposée divergente, elle est également divergente, S_n restant toujours supérieur à T_n et par suite croissant aussi indéfiniment.

Théorème de Kummer. — *Une série positive de terme général u_n est convergente si, à partir d'une certaine valeur de n, on a*

$$u_n v_n - u_{n-1} v_{n-1} > k u_{n-1},$$

v_n désignant une fonction positive de n, et k une constante positive; elle est divergente si, à partir d'une certaine valeur de n, on a

$$u_n v_n - u_{n-1} v_{n-1} < 0$$

et si de plus la série de terme général $\frac{1}{v_n}$ est divergente.

En effet, si l'on suppose d'abord la première inégalité vérifiée à partir de $n = m$, on en déduit

$$u_{m+1} < \frac{1}{k}(u_m v_m - u_{m+1} v_{m-1}),$$

$$u_{m+2} < \frac{1}{k}(u_{m-1} v_{m+1} - u_{m+2} v_{m-2}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$u_n \quad < \frac{1}{k}(u_{n-1} v_{n-1} - u_n v_n),$$

d'où

$$S_n < S_m + \frac{1}{k}(u_m v_m - u_n v_n),$$

et, à plus forte raison,

$$S_n < S_m - \frac{1}{k} u_m v_m;$$

la série est donc convergente, car le second membre de cette inégalité est une constante; au contraire si, à partir de $n = m$, la seconde inégalité est vérifiée, on peut écrire

$$u_m v_m < u_{m-1} v_{m+1}, \quad u_{m+1} v_{m-1} < u_{m+2} v_{m-2}, \quad \dots, \quad u_{n-1} v_{n-1} < u_n v_n,$$

d'où

$$u_n > \frac{u_m v_m}{v_n};$$

la série est donc divergente, puisque, à partir de $n = m$, ses termes sont supérieurs aux termes correspondants d'une série divergente.

Ce théorème très général est dû à Kummer (¹).

RÈGLES DE CONVERGENCE.

On peut reconnaître la convergence ou la divergence des séries positives au moyen de certaines *règles* qui constituent des conditions suffisantes mais non nécessaires; nous allons donner les plus usuelles.

Cauchy est le fondateur de la théorie de la convergence et de la divergence. Il a posé dans son *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique* les principes rigoureux qui ont servi de base à toutes les recherches ultérieures sur ce sujet (²).

Règle de d'Alembert. — *Une série positive est convergente si, à partir d'un certain rang, le rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *reste inférieur à une constante moindre que l'unité; elle est divergente si, à partir d'un certain rang, ce rapport reste supérieur à l'unité.*

En effet si, à partir de $n = m$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ reste inférieur à une constante k moindre que l'unité, on a

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < k, \qquad \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} < k, \quad \dots, \qquad \frac{u_n}{u_{n-1}} < k,$$

d'où

$$u_n < k^{n-m} u_m,$$

la série est donc convergente, puisque, à partir de $n = m$, ses termes sont inférieurs aux termes correspondants d'une progression convergente. Au contraire si, à partir de $n = m$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ reste supérieur à l'unité, les termes vont sans cesse en

---

(¹) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XIII, 1835, p. 171-184.

(²) On pourra consulter, pour l'étude de la théorie générale des règles de convergence, les travaux de Pringsheim (*Mathematische Annalen*, t. XXXV, 1890, p. 297-394, et t. XXXIX, 1891, p. 125-128). Auparavant, Dini et Paul du Bois-Reymond s'étaient occupés de la même question.

croissant et par suite la série est divergente, son terme général ne tendant pas vers zéro.

La règle de d'Alembert résulte immédiatement du théorème de Kummer en y faisant $v_n = 1$.

On déduit de ce qui précède la règle pratique suivante :

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite λ, quand n devient infini, la série est convergente pour $\lambda < 1$ et divergente pour $\lambda > 1$.

En effet, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, on peut déterminer un entier m tel que, à partir de $n = m$, on ait

$$\lambda - \sigma < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda + \sigma.$$

Soit d'abord $\lambda < 1$; comme la valeur de σ est arbitraire, si on la prend égale à $k - \lambda$, le nombre k étant compris entre λ et 1, la seconde inégalité devient $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$, la série est donc convergente. Soit maintenant $\lambda > 1$; si l'on prend σ égal à $\lambda - k$, le nombre k étant alors compris entre 1 et λ, la première inégalité devient $\frac{u_{n+1}}{u_n} > k$, d'où, à plus forte raison, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, la série est donc divergente. Enfin, pour $\lambda = 1$, il y a doute, sauf toutefois, quand on peut reconnaître qu'à partir d'un certain rang le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ reste supérieur à l'unité, cas où a série est divergente; s'il n'en est pas ainsi, il y a lieu de recourir à la règle de Raabe donnée plus loin (p. 36).

Règle de Cauchy. — *Une série positive est convergente si, à partir d'un certain rang, le radical $\sqrt[n]{u_n}$ reste inférieur à une constante moindre que l'unité; elle est divergente si, à partir d'un certain rang, ce radical reste supérieur à l'unité.*

En effet si, à partir de $n = m$, le radical $\sqrt[n]{u_n}$ reste inférieur à un nombre positif k moindre que l'unité, on a

$$u_n < k^n,$$

la série est donc convergente, puisque, à partir de $n = m$, ses termes sont inférieurs aux termes correspondants d'une progres-

sion convergente. Au contraire si, à partir de $n = m$, le radical $\sqrt[n]{u_n}$ reste supérieur à l'unité, le terme général devenant plus grand que l'unité ne tend pas vers zéro et la série est divergente.

On utilise dans les applications la règle suivante :

Si $\sqrt[n]{u_n}$ a une limite λ, quand n devient infini, la série est convergente pour $\lambda < 1$ et divergente pour $\lambda > 1$.

La démonstration est absolument semblable à celle déjà donnée à propos de la règle de d'Alembert.

Si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite, le radical $\sqrt[n]{u_n}$ a nécessairement la même limite (p. 13). Il ne faudrait point en conclure que les règles de d'Alembert et de Cauchy sont équivalentes, la seconde est plus générale que la première; en effet, il peut arriver que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne tendant vers aucune limite, $\sqrt[n]{u_n}$ en ait une. Soit, par exemple,

$$u_n = a^n \theta(n),$$

la fonction $\theta(n)$ désignant le nombre des diviseurs de n, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a\frac{\theta(n+1)}{\theta(n)};$$

ce rapport ne tend vers aucune limite, car la suite des nombres premiers étant illimitée, parmi les valeurs successives de n, il y a toujours, à des intervalles plus ou moins éloignés, des nombres premiers; toutes les fois qu'il en est ainsi $\theta(n)$ est égal à 2, tandis que $\theta(n+1)$ peut avoir les valeurs les plus diverses. Au contraire, si l'on considère le radical

$$\sqrt[n]{u_n} = a\sqrt[n]{\theta(n)},$$

comme $\theta(n)$ est supérieur à l'unité et inférieur à n, dès que n dépasse 2, on peut écrire

$$\sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{\theta(n)} < \sqrt[n]{n},$$

et comme les membres extrêmes de cette double inégalité ont l'unité pour limite (p. 14), il en est de même de $\sqrt[n]{\theta(n)}$, de sorte que la série est convergente pour $a < 1$ et divergente pour $a > 1$, résultats que la règle de d'Alembert ne permet point d'obtenir.

Enfin, une série peut converger sans qu'aucune des expressions $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ n'ait de limite. Ainsi, en supposant

$$0 < a < b < 1,$$

la série

$$a + b^2 + a^3 + b^4 + a^5 + \ldots,$$

qui est la somme de deux progressions, est convergente. Cependant $\sqrt[n]{u_n}$ est égal à a ou à b, suivant que n est impair ou pair, tandis que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers zéro pour n pair et croît indéfiniment pour n impair. Cet exemple très simple a été imaginé par Cesàro (¹).

Règle de Raabe. — *Une série positive est convergente si, à partir d'un certain rang, le produit* $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ *reste supérieur à une constante plus grande que l'unité; elle est divergente si, à partir d'un certain rang, ce produit reste inférieur à l'unité.*

En effet si, à partir de $n = m$, le produit $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ reste supérieur à une constante $k + 1$ plus grande que l'unité, on a

$$nu_n - (n+1)u_{n+1} > k u_{n+1},$$

c'est la première des inégalités de Kummer dans laquelle $v_n = n$, la série est donc bien convergente. Au contraire si, à partir de $n = m$, le produit $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ reste inférieur à l'unité, il en résulte

$$nu_n - (n+1)u_{n+1} < 0,$$

a seconde des inégalités de Kummer dans laquelle $v_n = n$, la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente, il en est de a série de terme général u_n.

$$\alpha_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1,$$

(¹) *Analisi algebrica*, p. 141.

on est conduit à énoncer la règle pratique suivante :

Si $n\alpha_n$ a une limite λ, quand n devient infini, la série est convergente pour $\lambda > 1$ et divergente pour $\lambda < 1$.

Cette règle se démontre sans difficulté; dans le cas où $\lambda = 1$, la série est divergente si, à partir d'un certain rang, le produit $n\alpha_n$ reste inférieur à l'unité; en outre, elle est encore divergente pour $\lambda = 1$, quand, en posant

$$n\alpha_n = 1 + \beta_n,$$

on reconnaît que le produit $n\beta_n$ a une limite finie pour $n = \infty$ ([1]). En effet, dans ces conditions, on peut toujours déterminer un entier positif p tel que, à partir d'une certaine valeur m de n, on ait $n\beta_n < p$; or, en supposant m supérieur à p, dès que n dépasse m, on a

$$1 + \frac{p}{n} < \frac{1}{1 - \frac{p}{n}},$$

d'où, à plus forte raison,

$$1 + \beta_n < \frac{n}{n-p},$$

c'est-à-dire

$$(n-p)u_n - (n-p+1)u_{n+1} < 0;$$

c'est la seconde des inégalités de Kummer dans laquelle

$$v_n = n - p,$$

mais la série de terme général $\frac{1}{n-p}$, où l'on donne à n les valeurs successives $m+1$, $m+2$, ..., est divergente, par suite la série de terme général u_n l'est aussi.

La règle qui vient d'être démontrée a été donnée par Raabe ([2]); on doit y recourir si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a pour limite l'unité, c'est-à-dire dans le cas où la règle de d'Alembert est insuffisante pour décider de la convergence ou de la divergence d'une série.

Application. Série de terme général $\frac{1}{n^p}$. — *La série positive*

([1]) Cette remarque est due à E. Cahen (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. V, 1886, p. 536-537).

([2]) *Zeitschrift für Physik, Mathematik und verwandte Wissenschaften*, t. X, 1832, p. 41-74. — Duhamel a retrouvé cette règle plusieurs années après. Voir : *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IV, 1839, p. 214-221.

de terme général $\frac{1}{n^p}$ *est convergente pour* $p > 1$ *et divergente pour* $p \leqq 1$.

Soit

$$x = 1 + \frac{1}{n},$$

on a

$$n\alpha_n = \frac{x^p - 1}{x - 1}; \quad = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1$$

or, on établit facilement (¹) que, pour $x = 1$, le second membre de cette égalité tend vers p, quelle que soit la valeur rationnelle ou irrationnelle de p; la limite de $n\alpha_n$ est donc p et, d'après la règle de Raabe, la série est convergente pour $p > 1$ et divergente pour $p < 1$; elle est encore divergente pour $p = 1$. Ces résultats pourraient s'établir directement par un procédé analogue à celui employé pour la série harmonique; ils ont pour conséquence la règle suivante :

Une série positive dans laquelle le produit $n^p u_n$ *a une limite* λ, *quand* n *devient infini, est convergente pour* $p > 1$ *et divergente pour* $p \leqq 1$, *en supposant, dans ce dernier cas, la limite* λ *non nulle.*

En effet, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, il existe un entier m tel que, à partir de $n = m$, on ait

$$\lambda - \sigma < n^p u_n < \lambda + \sigma.$$

Soit d'abord $p > 1$; de la double inégalité précédente on tire

$$u_n < \frac{\lambda + \sigma}{n^p};$$

la série est donc convergente puisque, à partir de $n = m$, ses termes sont inférieurs aux termes correspondants d'une série convergente. Soit maintenant $p \leqq 1$; en supposant la limite λ non nulle, on peut choisir σ assez petit pour que la différence $\lambda - \sigma$ soit positive, et, de l'inégalité

$$u_n > \frac{\lambda - \sigma}{n^p},$$

il résulte que la série est divergente (²).

(¹) *Voir* à ce sujet un article que nous avons publié dans *Mathesis*, 3ᵉ série, t. I, 1901, p. 20-22.

(²) Certains auteurs en déduisent que dans une série positive convergente la limite de nu_n est nécessairement zéro. C'est une assertion absolument erronée, car il existe des séries positives convergentes dans lesquelles le produit nu_n n'a pas de limite. *Voir* : ERNESTO CESÀRO, *Corso di Analisi algebrica*, p. 136.

Si l'on considère, par exemple, une série positive de terme général

$$u_n = \frac{A_0 n^p + A_1 n^{p-1} + \ldots + A_p}{B_0 n^q + B_1 n^{q-1} + \ldots + B_q};$$

pour $q - p \leqq 0$, le terme général ~~ne tendant pas vers zéro~~ croissant au delà de toute limite, la série est divergente ; pour $q - p > 0$, la limite de $n^{q-p} u_n$ est $\frac{A_0}{B_0}$: donc, si l'on a $q - p > 1$, la série est convergente et si l'on a $q - p \leqq 1$, elle est divergente.

Règle de Gauss. — *Si dans une série positive on a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + a n^{p-1} + a_1 n^{p-2} + \ldots + a_{p-1}}{n^p + b n^{p-1} + b_1 n^{p-2} + \ldots + b_{p-1}},$$

les termes décroissent constamment, à partir d'un certain rang, et tendent vers zéro pour $b - a > 0$; ils finissent par augmenter indéfiniment pour $b - a < 0$, et ont une limite non nulle pour $b - a = 0$; la série est convergente pour $b - a > 1$; dans tous les autres cas elle est divergente.

Soit

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \alpha_n,$$

quand on remplace $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ par sa valeur, on trouve pour $n\alpha_n$ une fraction rationnelle dont les deux termes sont de degré p ; alors si l'on effectue la division, le quotient étant limité à son premier terme $b - a$, l'expression $n\alpha_n$ peut se mettre sous la forme

$$n\alpha_n = b - a + \frac{\lambda}{n} \varphi(n),$$

en désignant par λ une constante et par $\varphi(n)$ une fraction dont la limite est l'unité ou zéro pour $n = \infty$.

I. — Soit d'abord $b - a > 0$, le nombre α_n finit par devenir positif et les termes décroissent à partir d'un certain rang ; d'autre part, k étant un nombre compris entre 0 et $b - a$, pour une valeur de n suffisamment grande m, on aura

$$\frac{u_m}{u_{m+1}} > 1 + \frac{k}{m}, \quad \frac{u_{m+1}}{u_{m+2}} > 1 + \frac{k}{m+1}, \quad \ldots, \quad \frac{u_{n-1}}{u_n} > 1 + \frac{k}{n-1},$$

d'où

$$\frac{u_m}{u_n} > \left(1 + \frac{k}{m}\right)\left(1 + \frac{k}{m+1}\right)\cdots\left(1 + \frac{k}{n-1}\right),$$

et, à plus forte raison,

$$\frac{u_m}{u_n} > 1 + k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right);$$

le nombre m restant fixe, le second membre de cette inégalité croît au delà de toute limite, lorsque n augmente indéfiniment; par suite, u_n tend vers zéro.

II. — Soit maintenant $b - a < 0$, la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ se trouve dans les mêmes conditions que la série de terme général u_n dans l'hypothèse précédente; ses termes, à partir d'un certain rang, vont donc en décroissant et tendent vers zéro; par suite, ceux de la série considérée finissent par augmenter indéfiniment.

III. — Soit enfin $b - a = 0$, on constate alors que $n^2\alpha_n$ peut se mettre sous la forme

$$n^2\alpha_n = b_1 - a_1 + \frac{\lambda}{n}\varphi(n),$$

en désignant encore par λ une constante et par $\varphi(n)$ une fraction dont la limite est l'unité ou zéro pour $n = \infty$. Si l'on suppose $b_1 - a_1 < 0$, le nombre α_n finit par devenir négatif et les termes vont en croissant à partir d'un certain rang; d'autre part, k étant un nombre supérieur à $a_1 - b_1$, pour une valeur de n suffisamment grande m, on aura

$$\frac{u_m}{u_{m+1}} > 1 - \frac{k}{m^2}, \quad \frac{u_{m+1}}{u_{m+2}} > 1 - \frac{k}{(m+1)^2}, \quad \ldots, \quad \frac{u_{n-1}}{u_n} > 1 - \frac{k}{(n-1)^2},$$

d'où, comme on peut supposer m supérieur à k,

$$\frac{u_m}{u_n} > \left(1 - \frac{k}{m^2}\right)\left[1 - \frac{k}{(m+1)^2}\right] \cdots \left[1 - \frac{k}{(n-1)^2}\right],$$

et, à plus forte raison,

$$\frac{u_m}{u_n} > 1 - k\left[\frac{1}{(m-1)m} + \frac{1}{m(m+1)} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \ldots\right],$$

c'est-à-dire (p. 28), en prenant alors m supérieur à $k + 1$,

$$u_n < \frac{u_m}{1 - \frac{k}{m-1}};$$

ainsi, m restant fixe, u_n reste toujours inférieur à une constante déterminée lorsque n augmente indéfiniment; comme il croît constamment, il a donc une limite inférieure ou au plus égale à cette constante et par suite non nulle. Il en est de même si l'on suppose $b_1 - a_1 > 0$; car, en considérant la série de terme général $\frac{1}{u_n}$, ses termes, d'après ce qui vient d'être dit, croissent à partir d'un certain rang et tendent vers une limite non nulle; ceux de la série considérée finissent donc par décroître constamment et tendent aussi vers une limite non nulle.

Il résulte de ce qui précède que le seul cas où la série puisse être convergente est celui où l'on a $b - a > 0$; si l'on applique alors la règle de Raabe, comme la limite de $n\alpha_n$ pour $n = \infty$ est égale à $b - a$, on en conclut que la série est convergente pour $b - a > 1$ et divergente pour $b - a < 1$; elle est encore divergente pour $b - a = 1$; en effet, dans ce cas, en désignant par $1 + \beta_n$ le produit $n\alpha_n$, la limite de $n\beta_n$ est égale à λ ou à zéro. La série n'est donc convergente que si l'on a $b - a > 1$.

La règle de convergence de Gauss permet l'étude d'une classe importante de séries comme on le verra plus tard; elle a été donnée par l'illustre analyste dans son Mémoire intitulé *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} x + \ldots$ (1).

Séries alternées.

Une série est dite *alternée* quand ses termes sont alternativement positifs et négatifs, au moins à partir d'un certain rang.

Théorème. — *Une série alternée est convergente, quand les valeurs absolues de ses termes vont constamment en décroissant à partir d'un certain rang et tendent vers zéro.* condition suffisante.

Si l'on admet que les valeurs absolues des termes commencent

(1) *Carl Friedrich Gauss Werke*, t. III, p. 139-143. La règle de Gauss a été généralisée par A. de Saint-Germain. Voir : *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XIV, 1890, p. 212-215. La démonstration qui vient d'être exposée est, sauf quelques légères modifications, la reproduction d'une Note que nous avons publiée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. XVIII, 1899, p. 157-160.

à décroître à partir du premier u_1 que l'on peut regarder comme positif, et si l'on pose

$$S_{2p} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2p-1} - u_{2p}),$$

on a

$$S_{2p+2} = S_{2p} + (u_{2p+1} - u_{2p+2}),$$

d'où, comme la différence $u_{2p+1} - u_{2p+2}$ est positive,

$$S_{2p+2} > S_{2p},$$

on en conclut que S_{2p} augmente avec p ; or

$$S_{2p} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2p-2} - u_{2p-1}) - u_{2p},$$

d'où, comme toutes les différences entre parenthèses sont positives,

$$S_{2p} < u_1 ;$$

ainsi, la somme S_{2p} croît en restant toujours inférieure à une constante, elle a donc une limite S ; d'autre part

$$S_{2p-1} = S_{2p} + u_{2p},$$

quand p devient infini, u_{2p} a pour limite zéro, S_{2p-1} a donc la même limite S que S_{2p} ; il résulte de là que S_n a une limite S pour $n = \infty$ et, par suite, que la série est convergente.

Le théorème précédent permet dans bien des cas de reconnaître la convergence ou la divergence d'une série alternée : on s'assure d'abord que le terme général a pour limite zéro ; alors, si l'on constate que les valeurs absolues des termes vont en décroissant, on est immédiatement fixé sur la nature de la série, sinon on cherche la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; si elle est inférieure à l'unité, les valeurs absolues des termes vont nécessairement en décroissant à partir d'un certain rang et la série est convergente ; si elle est supérieure à l'unité, les valeurs absolues des termes finissent par croître et la série n'est pas convergente ; enfin, si elle est égale à l'unité, il y a doute.

Soit, par exemple, la *série harmonique alternée*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

son terme général tend vers zéro et les valeurs absolues de ses termes vont en décroissant, elle est donc

Séries absolument convergentes.

Une série convergente est *absolument convergente* quand la série des valeurs absolues de ses termes est convergente. Une série convergente qui n'est pas absolument convergente est dite *semi-convergente*.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de terme général u_n soit absolument convergente est que, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, il existe un entier positif m tel que, à partir de $n = m$, on ait

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \sigma,$$

pour toute valeur entière et positive de p.

THÉORÈME. — *Une série est convergente quand la série des valeurs absolues de ses termes est convergente.*

En effet, soient P_n la somme des termes positifs et $-Q_n$ la somme des termes négatifs qui se trouvent dans S_n, on a

$$S_n = P_n - Q_n;$$

la somme T_n des valeurs absolues de tous ces termes a pour expression

$$T_n = P_n + Q_n;$$

par hypothèse T_n a une limite T; or, les sommes P_n et Q_n croissent avec n, puisque leurs termes sont positifs; d'autre part, elles sont respectivement inférieures à T_n et, par suite, à T, elles ont donc chacune une limite; soient P celle de P_n, et Q celle de Q_n, la limite de $P_n - Q_n$ sera $P - Q$; par conséquent la série considérée a une limite S égale à $P - Q$; elle est donc convergente et même absolument convergente ([1]).

La réciproque n'est pas exacte; ainsi la série harmonique alternée est convergente et cependant la série des valeurs absolues de ses termes est divergente.

([1]) Ce théorème est dû à CAUCHY, *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique* (*Œuvres complètes*, 2e série, t. III, p. 128-129).

On peut souvent, au moyen du théorème précédent, ramener l'étude de la convergence des séries dont les termes ont des signes quelconques à celle des séries positives; pour reconnaître la nature de ces séries, on commencera donc toujours par appliquer l'une ou l'autre des règles de convergence à la série formée par les valeurs absolues des termes. Si l'on cherche, par exemple, la limite de la valeur absolue du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, suivant qu'elle est inférieure ou supérieure à l'unité, la série considérée est convergente ou ne l'est pas; en effet, dans le premier cas, la série des valeurs absolues des termes est convergente, et dans le second, les valeurs absolues des termes allant en croissant, le terme général ne peut tendre vers zéro.

Il résulte encore de la démonstration ci-dessus que, dans une série absolument convergente, les deux séries formées par les termes positifs et par les termes négatifs sont convergentes; de plus, si leurs sommes respectives sont P et Q, la somme de la série a pour expression $S = P - Q$, et celle de la série des valeurs absolues $T = P + Q$.

Théorème. — *La somme d'une série absolument convergente ne change pas quand on intervertit l'ordre de ses termes.*

Si l'on suppose d'abord les termes tous positifs, la somme des n premiers termes étant

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

quand on intervertit l'ordre des termes on obtient une nouvelle série; soit

$$T_p = v_1 + v_2 + \ldots + v_p$$

la somme de ses p premiers termes, on peut toujours prendre n assez grand pour que S_n renferme tous les termes de T_p, alors on a

$$T_p \leqq S_n < S,$$

il résulte de là que la seconde série a une limite $T \leqq S$; mais inversement, on peut toujours prendre p assez grand pour que T_p renferme tous les termes de S_n et dans ce cas on trouve

$$S_n \leqq T_p < T,$$

on a donc $S \leqq T$; or, S ne peut être à la fois supérieur et inférieur à T, par suite

$$S = T.$$

Ainsi une série positive reste convergente quand on intervertit l'ordre de ses termes et conserve la même somme; en outre, si la première série est divergente, la seconde l'est également, sinon en rétablissant la disposition primitive on retrouverait une série convergente.

Si l'on suppose maintenant les termes de signes quelconques, la série étant absolument convergente par hypothèse, les séries formées par les termes positifs et par les termes négatifs sont convergentes (p. 44); soient P et Q leurs sommes respectives, la somme de la série est $P - Q$. Quand on change l'ordre destermes, les séries positives de sommes P et Q restent convergentes d'après ce qui précède, et conservent pour sommes P et Q; d'ailleurs la série des valeurs absolues reste aussi convergente, il en est, par suite, de même de la série considérée dont la somme sera encore $P - Q$.

On peut donc modifier arbitrairement l'ordre des termes d'une série absolument convergente sans altérer la somme, mais il en est tout autrement si la série n'est pas absolument convergente ([1]), comme le montre l'exemple suivant imaginé par Lejeune Dirichlet ([2]) et devenu classique :

Si l'on considère la série harmonique alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

la somme de ses n premiers termes étant S_n et S sa limite, quand on change l'ordre des termes de manière que chaque terme négatif soit précédé et suivi de deux termes positifs, on obtient une nouvelle série

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots;$$

([1]) Ce fait a été signalé pour la première fois par Cauchy dans les *Résumés analytiques*. (*Œuvres complètes*, 2e série, t. X, p. 69-70.)

([2]) *G. Lejeune Dirichlet's Werke*, t. I, p. 318-319.

soit T_n la somme de ses n premiers termes, en posant

$$u_n = \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n},$$

$$v_n = \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n},$$

on a

$$v_n - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right),$$

d'où

$$T_{3n} - S_{4n} = \frac{1}{2} S_{2n},$$

par suite T_{3n} a pour limite $\frac{3}{2}S$; d'ailleurs les différences $T_{3n+1} - T_{3n}$ et $T_{3n} - T_{3n-1}$ tendant vers zéro, les sommes T_{3n+1} et T_{3n-1} ont aussi $\frac{3}{2}S$ pour limite, la seconde série est donc convergente et a pour somme $\frac{3}{2}S$.

Ce résultat est une conséquence du théorème suivant dû à Riemann (¹) :

THÉORÈME. — *Les termes d'une série semi-convergente peuvent être disposés dans un ordre tel qu'elle ait une somme arbitraire.*

Soient S_n la somme des n premiers termes d'une série semi-convergente, P_p la somme des termes positifs et Q_q la somme des termes négatifs de S_n, de sorte que $n = p + q$; lorsque p et q augmentent indéfiniment, il en est nécessairement de même de P_p et de Q_q, sinon la série serait absolument convergente; alors, en désignant par λ une constante positive arbitraire, pour une valeur déterminée de q, on peut toujours trouver une valeur de p telle que l'on ait

$$P_p > \lambda + Q_q \geqq P_{p-1},$$

d'où

$$P_p - Q_q > \lambda \geqq P_{p-1} - Q_q;$$

(¹) *Œuvres mathématiques*, trad. Laugel, p. 234-235.

[illegible]

mais

$$(P_p - Q_q) - (P_{p-1} - Q_q) = P_p - P_{p-1};$$

quand on prend q de plus en plus grand, les valeurs correspondantes de p augmentent aussi et la différence $P_p - P_{p-1}$, qui est un terme de la série, tend vers zéro. Ainsi, la constante λ est comprise entre deux nombres dont la différence finit par devenir nulle, ces deux nombres ont donc pour limite λ. Il en résulte que si p et q croissent indéfiniment suivant une loi convenablement choisie, la somme S_n, qui est égale à $P_p - Q_q$, tend vers la constante positive arbitraire λ. On établirait pareillement que cette somme S_n est susceptible d'avoir pour limite une constante négative quelconque (1).

Il peut arriver aussi qu'une série convergente devienne divergente quand on change l'ordre de ses termes. Soient, en effet, S_n la somme des n premiers termes de la série alternée convergente

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \ldots,$$

et T_n la somme des n premiers termes de la série obtenue en intervertissant l'ordre des termes de la série primitive de manière que chaque terme négatif soit précédé et suivi de deux termes positifs, on a

$$T_{3n} - S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n-1}},$$

d'où

$$T_{3n} - S_{2n} > \frac{n}{\sqrt{4n-1}},$$

le second membre de cette inégalité croît indéfiniment avec n, il en est donc de même de T_{3n} et la seconde série est divergente.

Série de séries. — On dit qu'une série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est une *série de séries*, si ses termes sont respectivement les

(1) Cette démonstration est donnée par J. Tannery dans son *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. 69-70.

sommes de séries convergentes

$$\begin{array}{l} a_{1,1}+a_{1,2}+\ldots+a_{1,n}+\ldots, \\ a_{2,1}+a_{2,2}+\ldots+a_{2,n}+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}+a_{n,2}+\ldots+a_{n,n}+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

un élément quelconque de ce tableau est un *terme* de la série de séries. Toute série telle que

$$u_n = a_{n,1}+a_{n,2}+\ldots+a_{n,n}+\ldots$$

est une *ligne*, et toute série telle que

$$v_n = a_{1,n}+a_{2,n}+\ldots+a_{n,n}+\ldots$$

une *colonne* de la série de séries.

Théorème. — *La somme d'une série de séries convergente ne change pas quand on l'évalue par lignes ou par colonnes, si les lignes du tableau formé par les valeurs absolues des termes étant convergentes, il en est de même de la série de leurs sommes.*

Soit

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

une série convergente dont les termes sont eux-mêmes les sommes de séries absolument convergentes

$$\begin{array}{l} a_{1,1}+a_{1,2}+\ldots+a_{1,n}+\ldots, \\ a_{2,1}+a_{2,2}+\ldots+a_{2,n}+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}+a_{n,2}+\ldots+a_{n,n}+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

...'agit de démontrer que la somme des colonnes est égale à celle ...es quand la série positive de terme général

$$|a_{n,1}|+|a_{n,2}|+\ldots+|a_{n,n}|+\ldots$$

...gente.

... suppose d'abord les termes tous positifs, la somme des ...iers termes d'une colonne quelconque est inférieure à la

somme U_n des n premières lignes et par suite à sa limite U, elle a donc une limite, de sorte que chaque colonne forme une série convergente. Soit V_p la somme des p premières colonnes; la somme obtenue en prenant les n premiers termes dans les p premières colonnes est inférieure à U_n et par suite à U; en conséquence, p restant fixe et n augmentant indéfiniment, elle a une limite inférieure à U, cette limite est précisément V_p; mais la somme V_p croît avec p et, comme elle reste toujours inférieure à U, elle a nécessairement une limite $V \leqq U$. De même, la somme obtenue en prenant les p premiers termes dans chacune des n premières lignes est inférieure à V_p et par suite à V; il en résulte que, n restant fixe et p augmentant indéfiniment, elle a une limite inférieure à V, cette limite est précisément U_n; mais la somme U_n croît avec n, et comme elle reste toujours inférieure à V, elle a nécessairement une limite $U \leqq V$. Or, U ne peut être à la fois supérieur et inférieur à V, donc

$$U = V.$$

Si l'on suppose maintenant que les termes aient des signes quelconques, les lignes étant absolument convergentes, la somme P_n des termes positifs et la somme $-Q_n$ des termes négatifs de U_n ont chacune une limite, car $P_n + Q_n$ est la somme des n premiers termes de la série positive convergente de terme général

$$|a_{n,1}| + |a_{n,2}| + \ldots + |a_{n,n}| + \ldots;$$

soient P la limite de P_n et Q celle de Q_n, la limite U de U_n a pour expression

$$U = P - Q.$$

D'autre part, une colonne quelconque forme une série absolument convergente; en effet, d'après ce qui précède, la série des valeurs absolues de ses termes est convergente. Soit V_p la somme des p premières colonnes, M_p étant la somme des termes positifs et $-N_p$ la somme des termes négatifs qui se trouvent dans V_p, ces sommes ont chacune une limite, car $M_p + N_p$ est la somme des p premiers termes de la série positive de terme général

$$|a_{1,p}| + |a_{2,p}| + \ldots + |a_{n,p}| + \ldots$$

convergente, toujours d'après ce qui précède; soient M la limite de M_p et N celle de N_p, la somme V_p a une limite V dont l'expres-

sion est

$$V = M - N.$$

Or, si l'on considère le tableau obtenu en remplaçant les termes négatifs par des zéros, la somme des lignes est égale à celle des colonnes, donc

$$M = P,$$

on voit de même que

$$N = Q,$$

par suite

$$U = V.$$

Le théorème précédent, dû à Cauchy ([1]), est une extension du théorème sur l'interversion des termes d'une série. On peut le généraliser de la manière suivante :

Soit S_n la somme obtenue en prenant les n premiers termes dans les n premières lignes ou colonnes, cette somme a également U ou V pour limite. En effet, si l'on suppose d'abord les termes tous positifs, comme la somme S_n est inférieure à U_n et par suite à U, elle a nécessairement une limite $S \leqq U$; d'autre part, on a

$$U - U_n > V_n - S_n,$$

d'où, à plus forte raison,

$$S + U > U_n + V_n,$$

et, par conséquent,

$$S > U;$$

or, S_n ne peut être à la fois supérieur et inférieur à U, donc

$$S = U.$$

Si l'on suppose maintenant que les termes aient des signes quelconques, p_n étant la somme des termes positifs et $-q_n$ la somme des termes négatifs de S_n, la somme p_n est inférieure à P_n et par suite à P, elle a donc une limite p ; de même q_n a une limite q, de sorte que S_n a une limite S égale à $p - q$. D'ailleurs, si l'on considère le tableau obtenu en remplaçant les termes négatifs par des zéros, d'après ce qui précède, $p = P$ et, pour une raison analogue, $q = Q$; il en résulte que S est encore égal à U.

([1]) *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique* (*Œuvres complètes*, 2e série, t. III, note 7, p. 441-448).

Enfin, on voit aisément que la somme U est la limite de toute somme S_n déterminée par un contour C_n se déplaçant progressivement jusqu'à l'infini sur le tableau des termes, de manière à comprendre tout terme intérieur à C_{n-1} et à contenir autant de termes que l'on veut pour une valeur suffisamment grande de n [1].

L'énoncé du théorème suppose essentiellement que la série positive de terme général

$$|a_{n,1}| + |a_{n,2}| + \ldots + |a_{n,n}| + \ldots$$

est convergente; aussi, on doit s'assurer, dans les applications, que cette condition, d'ailleurs simplement suffisante, est remplie. Soit, par exemple, la série de séries

$$\begin{array}{l} x - x^2 + x^2 - x^3 + x^3 - x^4 + x^4 - x^5 + x^5 - x^6 + x^6 - \ldots \\ x(1-x) \quad - x^2(1-x^2) \quad + x^2(1-x^2) \quad - x^3(1-x^3) \quad + \ldots \\ x(1-x)^2 - x^2(1-x^2)^2 + x^2(1-x^2)^2 - x^3(1-x^3)^2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

dans laquelle x désigne un nombre positif et inférieur à l'unité; les lignes sont absolument convergentes, et les sommes de ces lignes constituent la progression absolument convergente

$$1 = x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \ldots;$$

cependant la sommation par colonnes donne une série indéterminée, cela tient à ce que la série positive de terme général

$$x(1-x)^n + 2x^2(1-x^2)^n + 2x^3(1-x^3)^n + \ldots$$

est divergente.

Transformation de Clausen. — Soit

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

une série convergente dont les termes sont eux-mêmes les sommes de séries absolument convergentes

$$\begin{array}{l} u_1 = a_{1,1} + a_{1,2} + \ldots + a_{1,n} + \ldots, \\ u_2 = a_{2,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{2,n} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_n = a_{n,1} + a_{n,2} + \ldots + a_{n,n} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

[1] Voir BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 106-110.

la série positive de terme général

$$|a_{n,1}| + |a_{n,2}| + \ldots + |a_{n,n}| + \ldots$$

étant convergente; si l'on pose

$$w_n = a_{n,n} + (a_{n,n+1} + a_{n+1,n}) + (a_{n,n+2} + a_{n+2,n}) + \ldots,$$

en désignant par v_n la somme de la $n^{\text{ième}}$ colonne, la somme $u_n + v_n$ est égale à

$$(a_{1,n} + a_{n,1}) + (a_{2,n} + a_{n,2}) + \ldots + (a_{n-1,n} + a_{n,n-1}) + a_{n,n} + w_n;$$

soient alors U_n, V_n, W_n les sommes des n premiers termes des séries de terme général u_n, v_n, w_n, et S_n la somme obtenue en prenant les n premiers termes dans les n premières lignes ou colonnes, on a

$$U_n + V_n = S_n + W_n,$$

on en conclut que W_n a pour limite U; ainsi la série de terme général u_n peut être transformée dans la série de terme général w_n; c'est cette transformation que l'on appelle *transformation de Clausen*.

Application. Séries de Lambert et de Clausen. — On donne le nom de *série de Lambert* à la série

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \ldots + \frac{x^n}{1-x^n} + \ldots;$$

cette série, considérée en 1771 par Lambert (¹) à propos de certaines spéculations cosmologiques, offre un grand intérêt dans l'étude de l'une des plus importantes questions de la théorie des nombres.

Si x est extérieur à l'intervalle de $(-1, +1)$, la série de Lambert n'est pas convergente, son terme général ne tendant pas vers zéro; il en est évidemment de même pour $x = \pm 1$. Elle est, au contraire, absolument convergente pour toutes les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-1, +1)$, car alors la valeur absolue du rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = x \frac{1-x^n}{1-x^{n+1}}$$

(¹) *Anlage zur Architektonik*, Riga, 1771, 1er cahier, p. 507.

a une limite inférieure à l'unité. Mais, dans ce même intervalle, chacun des termes de la série peut être regardé comme la somme d'une série absolument convergente, car

$$u_p = x^p + x^{2p} + x^{3p} + x^{4p} + \ldots;$$

si l'on représente par S la somme de la série de Lambert, on peut donc la mettre sous la forme

$$\begin{array}{rl}
S = & x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots \\
 & + x^2 + 0 + x^4 + 0 + x^6 + \ldots \\
 & + x^3 + 0 + 0 + x^6 + \ldots \\
 & + x^4 + 0 + 0 + \ldots \\
 & + x^5 + 0 + \ldots \\
 & + x^6 + \ldots \\
 & + \ldots;
\end{array}$$

or, x^n ne figure dans u_p que si n est divisible par p, par conséquent, si l'on représente par $\theta(n)$ le nombre des diviseurs de n, comme la série positive de terme général

$$|x^p| + |x^{2p}| + |x^{3p}| + \ldots$$

est convergente, on a

$$S = x\theta(1) + x^2\theta(2) + x^3\theta(3) + x^4\theta(4) + \ldots;$$

le coefficient de x^n est égal ou supérieur à 2 suivant que n est premier ou ne l'est pas. Cette propriété singulière de la série de Lambert renferme le principe d'une représentation générale des nombres premiers. En effet, si l'on pouvait calculer l'expression de S, on en déduirait, comme on le verra plus tard, par des dérivations successives, celle du coefficient de x^n; en écrivant alors que ce coefficient est égal à 2, on aurait la *loi des nombres premiers*. Ce problème présente les plus grandes difficultés; malgré les efforts de nombreux analystes, il est resté jusqu'à présent enveloppé d'un impénétrable mystère (¹).

(¹) *Voir* divers articles de Brocard : *Sur la fréquence et la totalité des nombres premiers*, publiés dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V, 1879 et t. VI, 1880.

Si l'on met la somme de la série de Lambert sous la forme

$$\begin{array}{l} S = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots \\ \quad\; x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots + x^{2n} + \ldots \\ \quad\; x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \ldots + x^{3n} + \ldots \\ \quad\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\; x^n + x^{2n} + x^{3n} + x^{4n} + \ldots + x^{n^2} + \ldots \\ \quad\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

en appliquant la transformation de Clausen, on obtient

$$w_n = x^{nn} + 2x^{n(n+1)} + 2x^{n(n+2)} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$w_n = \frac{1+x^n}{1-x^n} x^{n^2},$$

la série de Lambert est donc équivalente à la suivante

$$S = \frac{1+x}{1-x} x + \frac{1+x^2}{1-x^2} x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3} x^9 + \ldots;$$

c'est la *série de Clausen* (¹); elle présente l'avantage d'être beaucoup plus rapidement convergente.

On peut établir directement que la série de Clausen a la même somme que la série de Lambert (²). En effet, si l'on considère la série auxiliaire

$$T = \frac{x}{1-x} + \frac{x^4}{1-x^2} + \frac{x^9}{1-x^3} + \ldots,$$

absolument convergente pour les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-1, +1)$, dans ce même intervalle, chacun de ses termes peut être regardé comme la somme d'une série absolument convergente, car

$$u_p = x^{pp} + x^{p(p+1)} + x^{p(p+2)} + \ldots;$$

on voit que x^n ne figure dans u_p que si n est de la forme $n = pq$ avec la condition $q \geqq p$, donc p doit être un diviseur de n satisfaisant à l'inégalité $\frac{n}{p} \geqq p$, d'où $p \leqq \sqrt{n}$. D'ailleurs la série positive

(¹) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. III, 1828, p. 95.

(²) Cette démonstration est due à CATALAN, *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, 1880, p. 253-255.

de terme général

$$|x^{pp}| + |x^{p(p+1)}| + |x^{p(p+2)}| + \ldots$$

est convergente; par suite, lorsque l'on somme les colonnes du tableau formé par les développements de $u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots$, le coefficient de x^n est le nombre des diviseurs de n non supérieurs à $\sqrt{n}$; ce nombre est égal à $\frac{1}{2}\theta(n)$ ou à $\frac{1}{2}[\theta(n) - 1] + 1$ suivant que n n'est pas carré parfait ou est carré parfait; on le constate sans peine en observant simplement qu'à tout diviseur de n inférieur à $\sqrt{n}$ correspond un diviseur supérieur à $\sqrt{n}$. Ainsi

$$T = \frac{1}{2}[x\theta(1) + x^2\theta(2) + x^3\theta(3) + \ldots] + \frac{1}{2}(x + x^4 + x^9 + \ldots),$$

c'est-à-dire

$$S = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^{n^2}}{1 - x^n} - \sum_{n=1}^{n=\infty} x^{n^2}, \quad = \sum_{n=1}^{n=\infty} x^{n^2} \frac{1+x^n}{1-x^n}$$

ou

$$S = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 + x^n}{1 - x^n} x^{n^2}.$$

Multiplication des séries. — Théorème. — *Si deux séries convergentes ont respectivement pour terme général u_n et v_n, la série de terme général*

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1$$

est convergente et a pour somme le produit des sommes des deux séries, pourvu que l'une d'elles soit absolument convergente.

En effet, soient U_n, V_n et W_n les sommes des n premiers termes des trois séries considérées; U, V les limites de U_n, V_n; A la somme de la série des valeurs absolues des termes de la première série supposée absolument convergente, et B une constante supérieure aux valeurs absolues des sommes

$$V_1 = v_1, \quad V_2 = v_1 + v_2, \quad \ldots, \quad V_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n, \quad \ldots;$$

en désignant par σ un nombre positif arbitrairement petit, d'après les hypothèses, on peut déterminer un même entier m tel que l'on

cette double inégalité, vérifiée à partir de $n = 2m$, exprime que W_n a pour limite UV.

Le théorème précédent a été démontré pour la première fois par Cauchy ([1]) dans le cas où les deux séries sont absolument convergentes; Mertens ([2]) a fait voir qu'il subsiste en supposant seulement l'une des deux séries absolument convergente.

Si les deux séries de terme général u_n et v_n sont absolument convergentes, il en est de même de la série de terme général w_n; car, en appelant α_n et β_n les valeurs absolues de u_n et v_n, les séries de terme général α_n et β_n étant convergentes par hypothèse, il en est de même de la série de terme général

$$\gamma_n = \alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n\beta_1,$$

et comme on a

$$\gamma_n \geqq | u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1 |,$$

on en conclut que la série de terme général w_n est absolument convergente. D'ailleurs, dans ce cas particulier, il est facile de vérifier le théorème de la multiplication des séries en considérant le tableau

$$\begin{array}{l} u_1v_1 + u_1v_2 + u_1v_3 + u_1v_4 + \ldots \\ \quad + u_2v_1 + u_2v_2 + u_2v_3 + \ldots \\ \qquad + u_3v_1 + u_3v_2 + \ldots \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}$$

il suffit d'égaler la somme des lignes à celle des colonnes.

([1]) *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique* (*Œuvres complètes*, 2ᵉ série, t. III, p. 132-135.)

([2]) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXXIX, 1875, p. 182-184. La démonstration que nous donnons est empruntée à E. PRUVOST et D. PIÉRON, *Leçons d'Algèbre*, t. I, p. 329-330.

ou $v_1 = u_1 k_1$, $v_2 = u_2 k_2$ - - - -

$W_1 = u_1 v_1$

$W_2 = u_1 v_2 + u_2 v_1$

$W_3 = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1$

$W_4 = u_1 v_4 + u_2 v_3 + u_3 v_2 + u_4 v_1$

$W_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1$

$w_1 = u_1^2 \cdot k_1$

$w_2 = u_1 u_2 (k_1 + k_2)$

$w_3 = u_1 u_3 (k_1 + k_3) + u_2^2 k$

$w_4 = u_1 u_4 (k_1 + k_4) + u_2 u_3 (k_2 + k_3)$

$\sum W_n = u_1 \sum v_n + u_2 \sum v_n \ldots = \sum u_n \cdot \sum v_n$

EXERCICES.

1° Soient u_n le terme général d'une série convergente et a_n un nombre positif croissant avec n et augmentant au delà de toute limite; si l'on pose

$$s_n = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n,$$

le rapport $\frac{s_n}{a_n}$ tend vers zéro pour $n = \infty$.

KRONECKER.

2° La série

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} + \ldots,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignent des nombres positifs, est convergente.

H. LAURENT.

3° Si dans la série positive

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

chaque terme est moindre que le précédent, cette série est convergente ou divergente en même temps que la suivante

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots.$$

CAUCHY.

4° Une série positive de terme général u_n est convergente si, a_n étant une fonction positive de n, la relation

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geqq a_n\left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

est vérifiée à partir d'une certaine valeur de n.

GIUDICE.

5° La série

$$1 + \frac{a+c}{b+c} + \frac{(a+c)(2a+c)}{(b+c)(2b+c)} + \ldots + \frac{(a+c)\ldots(na+c)}{(b+c)\ldots(nb+c)} + \ldots$$

dans laquelle les nombres a, b, c sont positifs est convergente pour $a < b$ et divergente pour $a \geqq b$.

CATALAN.

6° Si la série positive

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \ldots$$

est divergente, s_n désignant la somme de ses n premiers termes, faire voir

que la série

$$\frac{1}{a_1 s_1^p} + \frac{1}{a_2 s_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_n s_n^p} + \ldots$$

est convergente pour $p > 1$ et divergente pour $p \leqq 1$.

ABEL.

7° La série

$$\frac{x}{x+3} + \frac{x(x+2)}{(x+3)(x+5)} + \frac{x(x+2)(x+4)}{(x+3)(x+5)(x+7)} + \ldots,$$

où x n'est pas un entier impair négatif, est convergente et a pour somme x.

SARRUS.

8° Étudier la série

$$1 + \frac{b+c}{a+c} + \frac{(b+c)(b+2c)}{(a+c)(a+2c)} + \ldots + \frac{(b+c)\ldots(b+nc)}{(a+c)\ldots(a+nc)} + \ldots$$

et la sommer lorsqu'elle est convergente.

CATALAN.

9° La série

$$\sqrt[2]{a} - \sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{a} - \sqrt[5]{a} + \ldots,$$

où a désigne une constante positive, est-elle convergente? Quelle est la nature de sa somme?

Étudier la série

$$(\sqrt[2]{a} - \sqrt[3]{a}) + (\sqrt[4]{a} - \sqrt[5]{a}) + \ldots.$$

LAGUERRE.

10° Démontrer que si la valeur absolue du nombre q est inférieure à l'unité, on a

$$\frac{q}{1+q^2} + \frac{q^2}{1+q^4} + \frac{q^3}{1+q^6} + \ldots = \frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \ldots,$$

$$\frac{q}{1+q} + \frac{q^2}{1+q^3} + \frac{q^3}{1+q^5} + \ldots = \frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^2} + \frac{q^5}{1-q^3} - \ldots.$$

JACOBI.

BIBLIOGRAPHIE.

BERTRAND (J.), Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral. Paris, Gauthier-Villars, 1864, in-4°, t. I, p. 225-266.

BURKHARDT (Heinr.) et MEYER (W. Franz), Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Leipzig, Teubner, 1898, in-8°, t. I, p. 47-146 (*Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse* von Alfred Pringsheim).

CATALAN (Eugène), Traité élémentaire des séries. Paris, Leiber et Faraguet, 1860, in-8°.

CESÀRO (Ernesto), Corso di Analisi algebrica. Torino, Bocca, 1894, in-8°, p. 116-184.

CHRYSTAL (G.), Algebra, t. II, 2° éd. London, Black, 1900, in-8°, p. 113-185.

JORDAN (C.), Cours d'Analyse de l'École polytechnique, 2° éd. Paris, Gauthier-Villars, 1893, in-8°, t. I, p. 272-310.

PRUVOST (E.) et PIÉRON (D.), Leçons d'Algèbre, première partie. Paris, Paul Dupont, 1893, in-8°, p. 284-344.

REIFF (Dr. R.), Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen, Laupp, 1889, in-8°.

TANNERY (Jules), Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Paris, Hermann, 1886, in-8°, p. 44-98.

III.

SÉRIES A TERMES VARIABLES.

Soit

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

une série dont les termes sont des fonctions continues, ou discontinues mais finies, d'une variable x et, de plus, convergente pour toutes les valeurs de x appartenant à un intervalle (a, b) y compris a et b; alors, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, pour chacune de ces valeurs de x on peut déterminer un entier positif m tel que, à partir de $n = m$, le reste $R_n(x)$ satisfasse à la double inégalité

$$-\sigma < R_n(x) < \sigma;$$

l'entier m dépend d'ailleurs de σ et de la valeur de x choisie; dans le cas où il est indépendant de la variable, c'est-à-dire lorsque, pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b) y compris a et b, on peut déterminer un même entier m tel que, à partir de $n = m$, la double inégalité précédente soit vérifiée, on dit que la série est *uniformément convergente dans l'intervalle* (a, b). Dans une telle série, l'approximation finit par devenir indépendante de la valeur de x que l'on considère dans l'intervalle (a, b), puisque, quand on calcule la somme des n premiers termes, n étant égal ou supérieur à m, le reste est inférieur à σ, quel que soit x dans cet intervalle (1).

(1) Cette définition de la convergence uniforme est celle adoptée par la plupart des analystes contemporains et notamment par Heine, Weierstrass, J. Tannery, Jordan, Picard, etc. Cependant Darboux et Dini ont préféré choisir une définition un peu plus générale bien que moins naturelle. — *Voir* JULES TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. 133-134.

Soit, par exemple, la série

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x}{(x+1)(2x+1)}+\ldots+\frac{x}{(\overline{n-1}x+1)(nx+1)}+\ldots,$$

considérée par Paul du Bois-Reymond [1]; on a

$$\frac{x}{(\overline{n-1}x+1)(nx+1)}=\frac{1}{\overline{n-1}x+1}-\frac{1}{nx+1},$$

d'où

$$S_n(x)=1-\frac{1}{nx+1}.$$

La série est convergente pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle $(0, a)$, en désignant par a un nombre positif; en effet, elle a pour somme zéro pour $x=0$, et l'unité pour toute autre valeur positive de x; dans ce dernier cas le reste a pour expression

$$R_n(x)=\frac{1}{nx-1};$$

pour $x=\frac{1}{n}$, quelque grand que soit n, ce reste se réduit à $\frac{1}{2}$; on ne peut donc pas déterminer un même entier m tel que, à partir de $n=m$, pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle $(0, a)$, le reste soit inférieur à un nombre positif arbitrairement petit; par suite, la série n'est pas uniformément convergente dans cet intervalle, bien qu'elle soit convergente pour toutes les valeurs de x qui y sont comprises. Au contraire, dans un intervalle (a, b), on a toujours

$$\frac{1}{nx+1}\leqq\frac{1}{na+1},$$

et si l'on détermine m de manière que, pour $n=m$, la fraction $\frac{1}{1+na}$ soit moindre qu'un nombre positif σ arbitrairement petit, pour toute valeur de n égale ou supérieure à m, le reste $R_n(x)$ sera inférieur à σ, quelle que soit la valeur de x dans l'intervalle (a, b); la série est donc uniformément convergente dans cet intervalle.

La notion délicate de convergence uniforme est récente; elle a

[1] *Antrittsprogramm*, p. 25.

été formulée d'abord par Stokes ([1]) et Seidel ([2]), puis par Cauchy ([3]); mais ce sont les travaux de Weierstrass, Thomé, Heine qui en ont révélé l'importance ([4]).

Théorème. — *Une série dont les termes sont fonctions d'une variable x est absolument et uniformément convergente dans un intervalle (a, b) quand, pour toutes les valeurs de x appartenant à cet intervalle, les valeurs absolues de ses termes sont inférieures ou égales aux termes correspondants d'une série positive convergente à termes constants.*

Il est d'abord évident que la série à termes variables est absolument convergente dans l'intervalle (a, b); car, si u_n est son terme général, la série des valeurs absolues

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

converge pour toute valeur de x appartenant à cet intervalle, ses termes y étant, d'après l'énoncé, inférieurs ou égaux aux termes correspondants d'une série positive convergente.

Soit maintenant T_n la somme des n premiers termes de la série positive à termes constants; on a

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| \leqq T_{n+p} - T_n.$$

Or, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, si l'on détermine un entier m tel que, à partir de $n = m$, on ait

$$T_{n+p} - T_n < \frac{\sigma}{2},$$

il en résulte, à plus forte raison,

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \frac{\sigma}{2},$$

([1]) *Transactions of the Cambridge philosophical Society*, t. VIII, 1849, p. 533-583. Le Mémoire de Stokes date de 1847.

([2]) *Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königlich bayerischen Akademie der Wissenschaften*, t. V, 1847, p. 379-394.

([3]) *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXXVI, 1853, p. 454-459.

([4]) Voir *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1866, t. LXVI, p. 334, et t. LXXI, 1870, p. 353.

c'est-à-dire, $R_n(x)$ étant le reste de la série à termes variables limité à son $n^{\text{ième}}$ terme,

$$-\frac{\sigma}{2} < R_n(x) - R_{n+p}(x) < \frac{\sigma}{2};$$

mais, pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b), on peut prendre p suffisamment grand pour que, à partir de $n = m$, la double inégalité

$$-\frac{\sigma}{2} < R_{n+p}(x) < \frac{\sigma}{2}$$

soit satisfaite, puisque la série à termes variables est convergente; on en déduit

$$-\sigma < R_n(x) < \sigma,$$

et cette double inégalité étant vérifiée, à partir de $n = m$, quelle que soit la valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b), on en conclut que la série à termes variables est uniformément convergente dans cet intervalle.

Le théorème précédent, attribué à Weierstrass (¹), permet de reconnaître facilement si une série est en même temps absolument et uniformément convergente; cette dernière propriété est, d'ailleurs, généralement impossible à constater directement, car l'étude du reste est presque toujours impraticable.

Ainsi, x désignant une variable positive non nulle, la série

$$a_1\frac{E(x)}{x} + a_2\frac{E(2x)}{2x} + \ldots + a_n\frac{E(nx)}{nx} + \ldots,$$

dont les termes sont des fonctions discontinues de x pour les valeurs entières de cette variable, est uniformément convergente dans tout intervalle, si la série

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

est absolument convergente (²).

(¹) Voir *Mathematische Werke*, p. 202, et *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 2ᵉ série, t. V, 1881, p. 158, en note.

(²) G. DARBOUX, *Mémoire sur les fonctions discontinues* dans les *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 2ᵉ série, t. IV, 1875, p. 80.

Théorème. — *Une série $f(x)$ dont les termes sont fonctions continues d'une variable x dans un intervalle (a, b) et qui est uniformément convergente dans cet intervalle a pour somme une fonction continue de la variable dans le même intervalle.*

En effet, soit

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x);$$

pour deux valeurs x et x_0 de la variable intérieures à l'intervalle (a, b), on a

$$f(x) - f(x_0) = S_n(x) - S_n(x_0) + R_n(x) - R_n(x_0).$$

Or la série considérée est uniformément convergente dans l'intervalle (a, b), on peut donc, si petit que soit le nombre positif σ, déterminer un entier positif m tel que, pour $n = m$, et quels que soient x et x_0 dans l'intervalle (a, b), les doubles inégalités

$$-\frac{\sigma}{3} < R_m(x_0) < \frac{\sigma}{3},$$

$$-\frac{\sigma}{3} < R_m(x) < \frac{\sigma}{3},$$

soient vérifiées; d'autre part, $S_m(x)$, somme de fonctions continues dans l'intervalle (a, b), est elle-même continue dans cet intervalle; on peut alors déterminer un nombre positif ρ tel que, x variant dans l'intervalle $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, on ait

$$-\frac{\sigma}{3} < S_m(x) - S_m(x_0) < \frac{\sigma}{3};$$

en ajoutant les trois doubles inégalités précédentes après avoir changé les signes de la première, on voit que, pour toutes les valeurs de x vérifiant la double inégalité

$$-\rho < x - x_0 < \rho,$$

on a

$$-\sigma < f(x) - f(x_0) < \sigma;$$

la fonction $f(x)$ est donc continue pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b; de plus, d'après les hypothèses faites sur $S_m(x)$ et $R_m(x)$, on reconnaît sans peine que $f(x)$ est continue à droite pour $x = a$ et continue à gauche pour $x = b$, par suite, la

somme de la série considérée est continue dans l'intervalle (a, b).

La réciproque du théorème précédent n'est pas exacte. La somme d'une série dont les termes sont fonctions continues d'une variable peut être continue sans que la série soit uniformément convergente. Soit, par exemple, la série suivante indiquée par Cantor

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2} \right];$$

la somme de cette série $\frac{x}{1+x^2}$ est continue, même pour $x = 0$, et cependant la série n'est pas uniformément convergente dans un intervalle comprenant zéro, car le reste

$$R_n(x) = \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}$$

se réduisant à $\frac{1}{2}$ pour $x = \frac{1}{n+1}$, si grand que soit n, on ne peut pas déterminer un entier positif m tel que, à partir de $n = m$, ce reste devienne en valeur absolue arbitrairement petit, quel que soit x dans l'intervalle considéré.

Séries entières.

Une *série entière* est une série de la forme

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ étant des constantes.

Les séries entières jouissent de propriétés analogues à celles des polynômes entiers; aussi, elles ont une importance capitale en Analyse. On est même parvenu, à l'exemple de Lagrange ([1]), à fonder toute la théorie des fonctions sur la considération de ces séries ([2]).

Théorème. — *Une série entière dont les termes restent finis pour $x = x_0$ est absolument et uniformément convergente*

([1]) *Théorie des fonctions analytiques* (*Œuvres de Lagrange*, t. IX).

([2]) Ch. Méray, *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques.*

[illegible] termes sont fonctions continues et qui est non [illegible] peut [illegible] une fonction dis-[illegible]

La somme d'une série de fonctions positives [illegible] soit continue, il est nécessaire et suffisant, qu'elle [illegible] convergente.

Vallée Poussin T I. § 391.

dans tout intervalle $(-a, +a)$ *dont la limite* a *est inférieure à* x_0 *en valeur absolue.*

Soit

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

une série entière; si les termes de cette série restent finis pour $x = x_0$, on peut déterminer une constante positive A supérieure à leurs valeurs absolues; par suite, en supposant la valeur absolue de x au plus égale à celle de a, on a

$$|a_n x^n| < \mathrm{A}\left|\frac{a}{x_0}\right|^n;$$

ainsi, dans l'intervalle $(-a, +a)$, les valeurs absolues des termes de la série entière sont inférieures aux termes correspondants d'une progression positive convergente, elle est donc absolument et uniformément convergente dans cet intervalle (p. 63).

Théorème d'Abel. — *Une série entière convergente pour une valeur positive* x_0 *de* x *est absolument convergente pour toutss les valeurs de* x *vérifiant la double inégalité*

$$-x_0 < x < x_0,$$

et uniformément convergente pour toutes les valeurs de x *telles que l'on ait*

$$-x_0 < x \leqq x_0.$$

Soit

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

une série entière; si elle est convergente pour $x = x_0$, ses termes, à partir d'un certain rang, tendent vers zéro, ils restent donc finis et, d'après le théorème précédent, la série est absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-x_0, +x_0)$. Il s'agit maintenant de prouver que la convergence uniforme s'étend jusqu'à la limite x_0 de l'intervalle; or, il suffit, pour l'établir, de démontrer que la série est uniformément convergente dans l'intervalle $(0, x_0)$. Soit alors $x = x_0 t$; quand x varie de 0 à x_0, la nouvelle variable t varie de 0 à 1, on est donc ramené à étudier dane l'intervalle $(0, 1)$ la série

$$b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n + \ldots,$$

où b_n est égal à $a_n x_0^n$; si l'on représente par $R_n(t)$ le reste limité au $n^{\text{ième}}$ terme, comme la série est convergente pour $t = 1$, en désignant par σ un nombre positif arbitrairement petit, on peut déterminer un entier m tel que, à partir de $n = m$, on ait

$$-\frac{\sigma}{4} < R_n(1) < \frac{\sigma}{4},$$

d'où, à plus forte raison, quel que soit p,

$$-\frac{\sigma}{4} < R_{n+p}(1) < \frac{\sigma}{4},$$

et, par suite,

$$-\frac{\sigma}{2} < s_p < \frac{\sigma}{2},$$

en posant

$$s_p = b_n + b_{n+1} + \ldots + b_{n+p-1};$$

d'ailleurs

$$R_n(t) - R_{n+p}(t) = b_n t^n + b_{n+1} t^{n+1} + \ldots + b_{n+p-1} t^{n+p-1},$$

c'est-à-dire

$$R_n(t) - R_{n+p}(t) = s_1 t^n + (s_2 - s_1) t^{n+1} + \ldots + (s_p - s_{p-1}) t^{n+p-1},$$

égalité dont le second membre peut se mettre sous la forme

$$t^n[s_1(1-t) + s_2(t-t^2) + \ldots + s_{p-1}(t^{p-2} - t^{p-1}) + s_p t^{p-1}].$$

Les coefficients des sommes $s_1, s_2, \ldots, s_p$ sont positifs ou nuls; d'autre part, ces sommes sont toutes comprises entre $-\frac{\sigma}{2}$ et $\frac{\sigma}{2}$, en les remplaçant d'abord par $\frac{\sigma}{2}$, puis par $-\frac{\sigma}{2}$, on obtient

$$-\frac{\sigma}{2} t^n < R_n(t) - R_{n+p}(t) < \frac{\sigma}{2} t^n,$$

d'où, à plus forte raison,

$$-\frac{\sigma}{2} < R_n(t) - R_{n+p}(t) < \frac{\sigma}{2};$$

mais, pour toute valeur de t appartenant à l'intervalle $(0, 1)$, on peut prendre p suffisamment grand pour que, à partir de $n = m$, la double inégalité

$$-\frac{\sigma}{2} < R_{n+p}(t) < \frac{\sigma}{2}$$

soit satisfaite, puisque la série entière en t est convergente; on en déduit

$$-\sigma < R_n(t) < \sigma,$$

et cette double inégalité étant vérifiée, à partir de $n = m$, quelle que soit la valeur de t appartenant à l'intervalle (0, 1), la série entière en t est uniformément convergente dans cet intervalle; la série entière en x est donc uniformément convergente pour toutes les valeurs de x telles que l'on ait

$$-x_0 < x \leqq x_0.$$

On en conclut que, pour toutes ces valeurs, la somme $f(x)$ de la série est continue, puisque ses termes sont des fonctions continues (p. 65); par suite, *si x tend vers x_0, la fonction $f(x)$ a pour limite la somme de la série pour $x = x_0$.*

Le théorème fondamental qui précède a été donné par Abel dans son célèbre Mémoire intitulé : *Recherches sur la série* $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$ (¹); la démonstration que nous venons d'exposer est due à Lejeune Dirichlet (²).

Il ne faudrait point croire qu'une série entière convergente pour $x = x_0$, l'est nécessairement aussi pour $x = -x_0$; par exemple, la série

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

convergente pour $x = 1$, ne l'est plus pour $x = -1$; en outre, cette série entière, bien que convergente pour $x = 1$, n'est pas absolument convergente pour cette valeur.

Théorème. — *Deux séries entières qui ont même somme dans un intervalle $(-a, +a)$ sont identiques.*

Soient

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$
$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots,$$

(¹) *Œuvres complètes*, éd. L. Sylow et S. Lie, t. I, p. 223.

(²) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2ᵉ série, t. VII, 1862, p. 253-255.

deux séries entières qui ont la même somme $f(x)$ dans un intervalle $(-a, +a)$; la série

$$a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n + \ldots$$

a une somme nulle pour toutes les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-a, +a)$ et en particulier pour $x = 0$, par suite la différence $a_0 - b_0$ est nulle; la série peut alors se mettre sous la forme

$$x[a_1 - b_1 + g(x)],$$

en posant

$$g(x) = (a_2 - b_2)x + (a_3 - b_3)x^2 + \ldots;$$

la fonction $g(x)$ s'annule pour $x = 0$ et, comme elle est continue pour cette valeur de la variable, σ désignant un nombre positif arbitrairement petit, on peut déterminer un nombre positif ρ tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant la double inégalité

$$-\rho < x < \rho,$$

on ait

$$-\sigma < g(x) < \sigma;$$

or, si la différence $a_1 - b_1$ n'était pas nulle, en prenant pour σ qui est arbitraire la valeur absolue de cette différence, il s'ensuivrait que l'expression

$$x[a_1 - b_1 + g(x)]$$

ne serait pas nulle pour toutes les valeurs de x, autres que zéro, comprises entre $-\rho$ et $+\rho$; par conséquent, on ne peut supposer la différence $a_1 - b_1$ différente de zéro, elle est donc nulle et, si l'on continuait le même raisonnement, on démontrerait qu'il en est de même de toutes les différences suivantes; de là résulte l'identité des deux séries.

Rayon de convergence. — Une série entière est toujours convergente pour $x = 0$; si elle n'est pas convergente pour $x = \rho$, quelque petit que soit le nombre positif ρ, il n'y a aucune valeur de x non nulle qui la rende convergente et l'on dit qu'elle a un *rayon de convergence nul*. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, on considère à partir de zéro les valeurs positives croissantes de x pour lesquelles la série est convergente; ou bien, ces valeurs augmentent

à l'infini et, la série étant convergente pour toute valeur de x, on dit qu'elle a un *rayon de convergence infini;* ou bien, ces valeurs demeurant finies, on peut toujours trouver une constante à laquelle elles restent toutes inférieures; comme elles sont croissantes, elles ont donc une limite R et alors, la série étant convergente pour toutes les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-R, +R)$ et ne l'étant pas pour toutes les valeurs de x extérieures, on dit qu'elle a un *rayon de convergence égal à* R; elle est d'ailleurs convergente ou non pour $x = \pm R$ [1].

La règle de d'Alembert, ou celle de Cauchy, permet souvent de déterminer le rayon R. En effet, la valeur absolue de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ou de $\sqrt[n]{a_n}$ a généralement une limite λ pour $n = \infty$; dans ce cas, la série entière est convergente à l'intérieur de l'intervalle $\left(-\frac{1}{\lambda}, +\frac{1}{\lambda}\right)$ et ne l'est pas pour les valeurs de x extérieures à cet intervalle, car si la valeur absolue de x est supérieure à $\frac{1}{\lambda}$, les termes finissent par augmenter indéfiniment en valeur absolue; la série est d'ailleurs convergente ou non pour $x = \pm \frac{1}{\lambda}$, on a donc

$$R = \frac{1}{\lambda}.$$

Intervalle de convergence. — *L'intervalle de convergence* d'une série entière est l'intervalle $(-R, +R)$ déterminé par son rayon de convergence R.

Dans tout intervalle (a, b) compris dans son intervalle de convergence, une série entière est absolument et uniformément convergente, sa somme est continue et ne change pas quand on intervertit l'ordre des termes.

Quand pour les limites $+R$ et $-R$ la série est convergente, alors elle est uniformément convergente dans l'intervalle $(-R, +R)$ et sa somme y est continue, mais elle n'est pas nécessairement absolument convergente pour $x = \pm R$; par suite, pour ces valeurs de la variable, la somme peut varier si l'on modifie la disposition des termes.

---

[1] La notion de rayon de convergence est due à Cauchy.

Fonction transcendante entière. — On appelle *fonction transcendante entière* toute fonction transcendante définie par une série entière de rayon de convergence non nul.

Séries dérivées. — Soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

une série entière; les séries

$$f'(x) = 1 a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$
$$f''(x) = 1.2 a_2 + 2.3 a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

formées au moyen des dérivées premières puis des dérivées secondes ... des termes de la série primitive $f(x)$, sont dites les *séries dérivées* de $f(x)$.

Théorème. — *Une série entière et ses séries dérivées ont même rayon de convergence.*

Soient

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

une série entière de rayon de convergence non nul R, et x une valeur quelconque de la variable intérieure à l'intervalle $(-R, +R)$; si x_0 est un nombre positif supérieur à la valeur absolue de x et moindre que R, la série étant convergente lorsque la variable est égale à x_0, on peut déterminer une constante positive A supérieure aux valeurs absolues des termes pour cette valeur de la variable; on a, par suite,

$$|a_n| < A\left|\frac{1}{x_0}\right|^n; \qquad |n a_n x^{n-1}| < n \frac{A}{x_0} \left|\frac{x}{x_0}\right|^{n-1},$$

et l'on en conclut que la série dérivée est convergente pour toute valeur de x intérieure à l'intervalle $(-R, +R)$. Elle ne l'est pas, au contraire, pour toute valeur de x extérieure à cet intervalle; en effet, dès que n dépasse le plus grand entier contenu dans $|x|$, l'inégalité

$$|a_n x^n| < |n a_n x^{n-1}|$$

se trouve vérifiée; ainsi, quand le terme général de la série dérivée tend vers zéro, il en est de même, à plus forte raison, du terme

à l'infini et, la série étant [illegible] ière série dit qu'elle a un *rayon de* [illegible] érieure à leurs demeurant finies, [illegible] r de l'in- laquelle elles restent [illegible] leurs de x santes, elles ont donc [illegible] gente pour toutes les [illegible] $(-R, +R)$ et ne l'étant [illegible] rieures, on dit qu'elle [illegible] x). En raison- est d'ailleurs convergente [illegible]

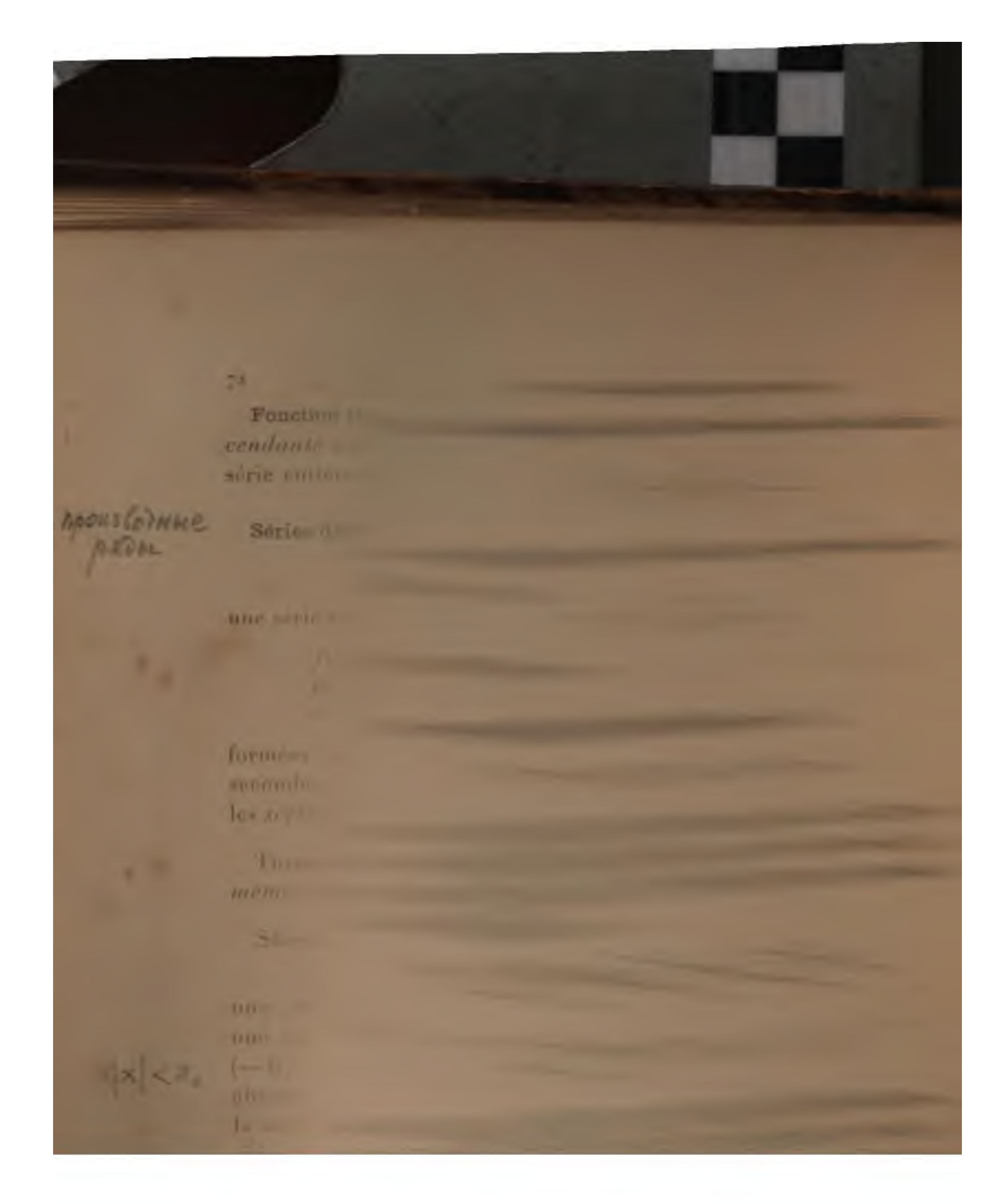
La règle de d'Alembert, [illegible] $+\cdots$ déterminer le rayon R. [illegible] ainsi de suite. a généralement [illegible] entière est convergente [illegible] et ne l'est pas pour les [illegible] non nul R; la série car si la valeur [illegible] $\frac{[illegible]}{n+1}+\cdots,$ par augmente [illegible] leurs convergente [illegible] me rayon de convergence. [illegible] toute valeur de x intérieure à [illegible] que n dépasse le plus grand

Intervalle de convergence [illegible] $|a_n x^n|$ d'une série [illegible] rayon de convergence [illegible]

[illegible] cette série deviennent inférieurs en [illegible] respondants de la série dérivée. Le [illegible] seconde série n'est donc pas nul, [illegible] R; il ne peut alors différer de R, [illegible] plus R pour rayon de convergence,

Quand [illegible] écède qu'une série entière et ses séries [illegible] de convergence, qu'il soit différent de [illegible]

[illegible] est convergente pour une des limites de son [illegible] ence, la série dérivée n'est pas nécessaire- [illegible] pour cette valeur de la variable, bien que les



Fonction [illegible]
cendante [illegible]
série entière [illegible]

производные ряды

Séries [illegible]

une série [illegible]

formées [illegible]
seconde [illegible]
les [illegible]

Th[illegible]
même [illegible]

S[illegible]

une [illegible]
une [illegible]
$|x| < a_0$ (—1) [illegible]
[illegible]

trairement petit, on peut déterminer un même entier m tel que, pour $n = m$, on ait

$$-\frac{\sigma}{3} < \frac{R_m(x) - R_m(x_0)}{x - x_0} < \frac{\sigma}{3},$$

et aussi, $S'_m(x)$ étant la somme des m premiers termes de $f'(x)$,

$$-\frac{\sigma}{3} < S'_m(x_0) - f'(x_0) < \frac{\sigma}{3};$$

d'autre part, on peut déterminer un nombre positif ρ tel que, x variant dans l'intervalle $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, on ait

$$-\frac{\sigma}{3} < \frac{S_m(x) - S_m(x_0)}{x - x_0} - S'_m(x_0) < \frac{\sigma}{3};$$

si l'on ajoute ces doubles inégalités, on voit que, pour toutes les valeurs de x vérifiant la double inégalité

$$-\rho < x - x_0 < \rho,$$

on a

$$f'(x_0) - \sigma < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) + \sigma.$$

La dérivée de $f(x)$ pour $x = x_0$ est donc $f'(x_0)$.

Ainsi, à l'intérieur de son intervalle de convergence, une série entière a pour dérivée sa série dérivée et, comme on peut raisonner sur cette dernière série de la même manière que sur la série primitive, on en conclut qu'une série entière est indéfiniment dérivable à l'intérieur de son intervalle de convergence, ses séries dérivées y représentant ses dérivées successives.

Application. Équation différentielle linéaire du second ordre. — Une équation différentielle linéaire du second ordre est une relation telle que

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + y\,g(x) = 0,$$

où figurent une fonction y de la variable x et les deux premières dérivées de y par rapport à x.

Nous allons démontrer que si les coefficients $f(x)$ et $g(x)$ sont développables en séries entières convergentes

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots,$$

l'équation différentielle peut être vérifiée identiquement par une série entière de la forme

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_n x^n + \ldots,$$

les deux constantes λ_0 et λ_1 étant arbitraires; nous établirons ensuite que la série précédente converge à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$, lorsque les séries $f(x)$ et $g(x)$ sont supposées absolument convergentes pour $x = \pm 1$, condition toujours réalisable au moyen d'un changement de variable.

Si l'on prend d'abord les dérivées première et seconde de la série y, puis que l'on substitue dans l'équation différentielle, on obtient, en annulant les coefficients des puissances de x,

$$\begin{aligned}
&1.2\lambda_2 + a_0\lambda_1 + b_0\lambda_0 = 0,\\
&2.3\lambda_3 + 2a_0\lambda_2 + (a_1 + b_0)\lambda_1 + b_1\lambda_0 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&n(n-1)\lambda_n + (n-1)a_0\lambda_{n-1} + [(n-2)a_1 + b_0]\lambda_{n-2} + \ldots\\
&\qquad + (a_{n-2} + b_{n-3})\lambda_1 + b_{n-2}\lambda_0 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

ces équations déterminent successivement $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \ldots$ en fonction des constantes arbitraires λ_0 et λ_1. Il reste maintenant à prouver que la série de terme général $\lambda_n x^n$ est convergente à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$; or, soient a et b deux nombres positifs respectivement supérieurs aux sommes des séries positives convergentes

$$\begin{aligned}
&|a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots,\\
&|b_0| + |b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n| + \ldots,
\end{aligned}$$

on a nécessairement

$$a > |a_n|, \qquad b > |b_n|;$$

soient, de plus, A_0 et A_1 deux nombres positifs égaux ou supérieurs aux valeurs absolues de λ_0 et λ_1, si l'on considère les équations

$$\begin{aligned}
&2A_2 = aA_1 + bA_0,\\
&3A_3 = 2aA_2 + (a + b)A_1 + bA_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&-1)nA_n = (n-1)aA_{n-1} + [(n-2)a + b]A_{n-2}\\
&\qquad + [(n-3)a + b]A_{n-3} + \ldots + (a + b)A_1 + bA_0 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

on voit sans peine que ces équations déterminent des nombres $A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ tous positifs et tels que l'on ait

$$A_n > |\lambda_n|;$$

mais la relation qui détermine A_n peut s'écrire

$$\begin{aligned}&(n-1)nA_n\\ &\quad = a[(n-1)A_{n-1}+(n-2)A_{n-2}+\ldots+A_1]+b(A_{n-2}+A_{n-3}+\ldots+A_0),\end{aligned}$$

en changeant n en $n-1$, on trouve

$$\begin{aligned}&(n-2)(n-1)A_{n-1}\\ &\quad = a[(n-2)A_{n-2}+(n-3)A_{n-3}+\ldots+A_1]+b(A_{n-3}+A_{n-4}+\ldots+A_0),\end{aligned}$$

et si l'on retranche cette équation de la précédente, on obtient

$$(n-1)nA_n = (n-1)(a+n-2)A_{n-1}+bA_{n-2}.$$

Il suffit donc de prendre a supérieur à 2 pour que A_n soit supérieur à A_{n-1}; or

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{n}{a+n-2} - \frac{b}{(n-1)(a+n-2)}\,\frac{A_{n-2}}{A_n},$$

et puisque le rapport $\frac{A_{n-2}}{A_n}$ est moindre que l'unité, il en résulte que, pour $n=\infty$, la limite de $\frac{A_{n-1}}{A_n}$ est l'unité; par suite, si r est un nombre positif inférieur à 1, la série positive

$$A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \ldots + A_n r^n + \ldots$$

est convergente; il en est donc de même de la série entière

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_n x^n + \ldots,$$

pour toutes les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-1, +1)$.

Si l'on se reporte aux équations qui permettent de déterminer les coefficients $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \ldots$, on constate que la valeur de λ_n est de la forme

$$\lambda_n = \lambda_0 \alpha_n + \lambda_1 \beta_n,$$

en désignant par α_n et β_n des fonctions des coefficients $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$; pour $\lambda_1 = 0$, $\lambda_0 = 1$, on a $\lambda_n = \alpha_n$; de même $\lambda_n = \beta_n$ pour $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$; par suite, les séries

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots,$$
$$v = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_n x^n + \ldots.$$

sont convergentes pour toutes les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-1, +1)$ et la forme générale des solutions de l'équation différentielle développables en séries entières est

$$y = \lambda_0 u + \lambda_1 v.$$

Les mêmes raisonnements s'appliqueraient à une équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + f_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + y f_n(x) = 0,$$

seulement les calculs seraient plus longs [1].

Série binomiale. — On donne le nom de *série binomiale* à la série entière

$$y = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots,$$

dont le rayon de convergence est l'unité. Si l'on prend sa dérivée, on voit qu'elle vérifie la relation

$$y'(1+x) = my;$$

soit

$$z = (1+x)^m,$$

on trouve

$$z'(1+x) = mz,$$

par suite

$$zy' - yz' = 0,$$

d'où, λ désignant une constante,

$$y = \lambda z;$$

quand x s'annule, les deux fonctions y et z se réduisent à l'unité; la constante λ est donc aussi égale à l'unité, et l'on a, pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$ et pour toute valeur rationnelle de m [2],

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots, \qquad -1 < x < 1.$$

---

[1] Nous avons adopté dans ce qui précède le mode d'exposition de TANNERY [et MOLK] dans leurs *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques*, t. I, p. 92-96.

[2] [Voir] M. GODEFROY, *Sur la formule du binôme* dans *Mathesis*, 2ᵉ série, [t. …], p. 39-41.

Il reste à examiner le cas où la valeur absolue de x est égale à l'unité; si l'on pose alors

$$a_n = \left(1 - \frac{m+1}{1}\right)\left(1 - \frac{m+1}{2}\right)\cdots\left(1 - \frac{m+1}{n}\right),$$

on peut mettre la série binomiale sous la forme

$$y = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \ldots + (-1)^n a_n x^n + \ldots.$$

Lorsque n croît, les coefficients a_n finissent par avoir tous le même signe, car le rapport

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n-m}$$

tend vers l'unité.

Soit d'abord $x = -1$; la série se réduit à

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots,$$

et la limite, pour $n = \infty$, de l'expression

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{(m+1)n}{n-m}$$

est égale à $m+1$; par suite, les termes finissant par être de même signe, pour $m+1 \geqq 1$ la série est convergente, tandis que pour $m+1 < 1$ elle ne l'est pas; mais, dans le premier cas, d'après le théorème d'Abel, la limite de y pour $x = -1$ est égale à la somme de la série pour $x = -1$; on a donc

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \ldots + (-1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} + \ldots, \qquad m > 0.$$

Soit maintenant $x = +1$; la série binomiale devient

$$a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n + \ldots,$$

et, à partir d'un certain rang, les termes sont alternativement positifs et négatifs; si l'on suppose $m+1 \leqq 0$, leurs valeurs absolues ne vont pas en décroissant, car

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{m+1}{n-m},$$

la série n'est donc pas convergente. Elle l'est, au contraire, pour $m+1 > 0$; en effet, la relation précédente montre que, dans cette hypothèse, les valeurs absolues des termes finissent par décroître;

ou, pour toutes valeurs entières et positives de q, l'inégalité

$$\left(1-\frac{m+1}{p+q}\right)\left(1-\frac{m-1}{p-q}\right) < 1$$

est vérifiée, de là résulte

$$\frac{u_p}{u_n} > \left(1+\frac{m+1}{p}\right)\left(1+\frac{m+1}{p+1}\right)\cdots\left(1+\frac{m+1}{n-1}\right),$$

et, a plus forte raison,

$$\frac{u_p}{u_n} > 1+(m+1)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\dots+\frac{1}{n}\right);$$

le nombre p restant fixe, le second membre de cette inégalité croît au delà de toute limite, quand n augmente indéfiniment, par suite u_n tend vers zéro. Si donc on suppose $m+1>0$, on a, pour la même raison que précédemment,

$$(1+1)^m = 1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}+\dots,\quad m+1>0.$$

L'application de la règle de Gauss conduit immédiatement aux mêmes résultats.

Si l'on fait $m=\frac{1}{2}$, puis $m=-\frac{1}{2}$, on obtient les développements suivants, d'un usage fréquent,

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2.4}x^2+\dots+(-1)^n\frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4.6\dots 2n}x^n+\dots,\quad -1<x<1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\dots+(-1)^n\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}x^n+\dots,\quad -1<x<1.$$

Lorsque m est entier, le développement est limité, et, en posant $x=\frac{b}{a}$, on trouve

$$(a+b)^m = a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+\dots+b^m;$$

me. Les termes équidistants des extrêmes

ont les mêmes coefficients, car le développement de $(a+b)^m$ doit être identique à celui de $(b+a)^m$. Tous les coefficients sont évidemment entiers. En changeant b en $-b$, le développement devient

$$(a-b)^m = a^m - \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 - \ldots + (-1)^m b^m.$$

Polynômes de Legendre. — Si l'on pose

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}},$$

on a

$$1-2tx+t^2 = 1-t(2x-t),$$

par suite

$$y = 1 + \frac{1}{2}t(2x-t) + \frac{1.3}{2.4}t^2(2x-t)^2 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}t^n(2x-t)^n + \ldots.$$

Soient r la valeur absolue de t, et ρ celle de x; lorsque l'on développe les parenthèses et que l'on effectue les multiplications, la série des valeurs absolues des termes ainsi obtenus devient, le groupement primitif étant rétabli,

$$1 + \frac{1}{2}r(2\rho+r) + \frac{1.3}{2.4}r^2(2\rho+r)^2 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}r^n(2\rho+r)^n + \ldots;$$

cette dernière série est le développement de

$$[1-r(2\rho+r)]^{-\frac{1}{2}};$$

elle est convergente pour

$$r^2+2\rho r-1<0,$$

ou

$$r < -\rho + \sqrt{\rho^2+1}.$$

La série considérée est alors absolument convergente pour

$$|t| < -|x| + \sqrt{x^2+1},$$

et sa somme ne change pas quand on intervertit l'ordre des termes. Or, si l'on ordonne par rapport aux puissances croissantes de t, le

coefficient de t^n a pour expression

$$X_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{1.2\ldots n}x^n - \frac{1.3\ldots(2n-3)}{1.2\ldots(n-2)}\frac{x^{n-2}}{2} + \frac{1.3\ldots(2n-5)}{1.2\ldots(n-4)}\frac{x^{n-4}}{2.4} - \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{1.3\ldots(2n-2p-1)}{1.2\ldots(n-2p)}\frac{x^{n-2p}}{2.4.6\ldots2p} + \ldots,$$

le dernier terme différant suivant que n est pair ou impair; le développement de y peut donc se mettre sous la forme

$$y = X_0 + X_1 t + X_2 t^2 + \ldots + X_n t^n + \ldots.$$

Les coefficients des puissances successives de t sont les *polynômes de Legendre* (1). Ces fonctions se présentent dans la théorie de l'attraction des corps sphériques et, pour cette raison, Gauss (2) leur a donné le nom de *fonctions sphériques*, désignation qu'elles ont conservée en Allemagne; étudiées d'abord par Legendre dans ses *Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes* (3), elles ont été depuis l'objet de nombreux travaux (4).

Le polynôme X_n peut s'écrire

$$X_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{1.2\ldots n}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2n-1}\frac{x^{n-2}}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-1)(2n-3)}\frac{x^{n-4}}{2.4} - \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)}\frac{x^{n-2p}}{2.4.6\ldots2p} + \ldots\right].$$

Mais

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{2.4.6\ldots2n};$$

en effet, en supposant cette identité vérifiée on constate aisément qu'elle subsiste lorsqu'on y remplace n par $n+1$; or elle a lieu pour $n=1$, $n=2$, ..., elle est donc générale. Par suite, le

---

(1) On trouve le développement précédent dans les travaux de Laplace et de Legendre sur l'attraction des sphéroïdes et la figure des planètes : *Mémoires de Mathématique et de Physique tirés des registres de l'Académie royale des Sciences*, 1782, p. 138, et 1784, p. 371.

(2) *Carl Friedrich Gauss Werke*, t. VI, p. 648.

(3) *Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l'Académie royale des Sciences par divers savans*, t. X, 1785, p. 411. Le Mémoire de Legendre, bien que publié seulement en 1785, est d'une date antérieure à 1782.

(4) E. Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*.

terme en x^{n-2p} du produit $2.4.6\ldots 2n X_n$ a pour expression

$$(-1)^p \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)} \frac{x^{n-2p}}{2.4.6\ldots 2p},$$

c'est-à-dire

$$(-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}(2n-2p)(2n-2p-1)\ldots(n-2p+1)x^{n-2p},$$

ou encore

$$(-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} \frac{d^n x^{2n-2p}}{dx^n},$$

on en conclut que le produit $2.4.6\ldots 2n X_n$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ du polynôme

$$(x^2-1)^n = x^{2n} - \frac{n}{1}x^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{2n-4} - \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}x^{2n-2p} + \ldots;$$

on a donc

$$X_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n};$$

formule remarquable due à Olinde Rodrigues ([1]).

L'équation $X_n = 0$ a ses n racines réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$. En effet, soit

$$z = (x^2-1)^n;$$

la fonction continue z a n racines égales à -1 et n racines égales à $+1$, par suite z' a $n-1$ racines égales à -1, $n-1$ racines égales à $+1$ et, d'après le théorème de Rolle, une racine a_1 comprise entre -1 et $+1$; il résulte de là que z'' a $n-2$ racines égales à -1, $n-2$ racines égales à $+1$ et, d'après le théorème de Rolle, une racine b_1 comprise entre -1 et a_1 et une racine b_2 comprise entre a_1 et $+1$; en continuant toujours ainsi, on voit finalement que $z^{(n)}$, et par suite X_n, a ses n racines réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$ ([2]).

([1]) *Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes*, dans la *Correspondance sur l'École royale polytechnique*, t. III, 1814-1816, p. 361-385.

([2]) Ce résultat a été trouvé par Legendre dans ses *Recherches sur la figure des planètes* (*Mémoires de Mathématique et de Physique tirés des registres de l'Académie royale des Sciences*, 1784, p. 374-375).

Trois polynômes consécutifs vérifient la relation de récurrence

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0,$$

car en dérivant par rapport à t la fonction

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}},$$

on a

$$(1-2tx+t^2)y' + (t-x)y = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1-2tx+t^2)[X_1 + 2X_2t + \ldots + (n+1)X_{n+1}t^n + \ldots] \\ + (t-x)[X_0 + X_1t + \ldots + X_nt^n + \ldots] = 0,$$

et si l'on annule le coefficient de t^n, on trouve immédiatement la relation à établir.

Le polynôme X_n vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre. Soit, en effet,

$$z = (x^2-1)^n;$$

on obtient en prenant la dérivée logarithmique

$$\frac{z'}{z} = \frac{2nx}{x^2-1},$$

ou

$$z'(x^2-1) = 2nzx;$$

si maintenant on dérive $(n+1)$ fois les deux membres de cette égalité, on trouve

$$(x^2-1)z^{(n+2)} + 2xz^{(n+1)} - n(n+1)z^{(n)} = 0,$$

par suite

$$(x^2-1)X''_n + 2xX'_n - n(n+1)X_n = 0,$$

c'est l'équation différentielle des polynômes de Legendre [1].

Série hypergéométrique. — On donne le nom de *série hypergéométrique* à la série entière

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n + \ldots,$$

[1] Legendre la donne dans ses *Exercices de Calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures*, t. II, p. 257.

où α, β, γ désignent des nombres qui ne sont pas des entiers négatifs; cette série remarquable a été considérée pour la première fois par Gauss [1] dans l'un de ses plus beaux Mémoires; après lui, d'éminents analystes, Kummer, Riemann, Schwarz, Appell, Goursat, en ont fait le sujet de savantes recherches [2].

Le rapport du terme de rang $n+2$ au précédent a pour expression

$$\frac{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}{n^2+(\gamma+1)n+\gamma}x;$$

sa limite, pour $n=\infty$, est égale à x; la série hypergéométrique a donc l'unité pour rayon de convergence.

Si l'on a $x=1$, les termes finissent par devenir de même signe; l'application de la règle de Gauss à la série des valeurs absolues donne alors les résultats suivants :

1° $\alpha+\beta-\gamma-1>0$. Les termes augmentent indéfiniment en valeur absolue.

2° $\alpha+\beta-\gamma-1=0$. Les termes ont une limite non nulle.

3° $\alpha+\beta-\gamma-1<0$. Les termes tendent vers zéro.

La série est convergente quand α, β, γ vérifient l'inégalité

$$\alpha+\beta-\gamma<0,$$

et seulement dans ce cas.

Si l'on a $x=-1$, on voit que le rapport d'un terme au précédent finit par devenir négatif quand n est suffisamment grand; les termes sont donc, à partir d'un certain rang, alternativement positifs et négatifs; d'après ce qui précède, ils ne tendent vers zéro que si l'on a $\alpha+\beta-\gamma-1<0$, et, dans ce cas, on sait que leurs valeurs absolues vont en décroissant; la série n'est donc convergente que pour

$$\alpha+\beta-\gamma-1<0;$$

elle n'est d'ailleurs absolument convergente que si l'inégalité

$$\alpha+\beta-\gamma<0$$

est vérifiée.

---

(1) *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\ldots$ (*Carl Friedrich Gauss Werke*, t. III, p. 123).

(2) Un résumé historique et critique de ces travaux a été publié par Papperitz dans les *Sitzungsberichte der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden*, 1889, Mémoire 4.

La série hypergéométrique est un cas particulier de la série plus générale

[illegible] $\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\beta})(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^{2})(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})}x^{2}+\ldots,$ [illegible]

une série de Heine [illegible] on la retrouve, en effet, si l'on fait $q=1$ dans cette dernière série.

Lorsque la série hypergéométrique est convergente, on désigne sa somme par

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

[illegible] fonction de Gauss; les constantes [illegible]

La fonction [illegible] est symétrique par rapport à α et β; [illegible]

[illegible] $F(\beta, \alpha, \gamma, x)$.

[illegible] tient à ce qu'elle [illegible] transcendantes entières [illegible] aux paramètres des [illegible]

[illegible] sont susceptibles d'être [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] une équation différentielle [illegible] d'établir de la manière [illegible]

[illegible] $(\beta-n-1)$, [illegible]

[illegible] *Mathematik*, t. XXXII, 1846,

on voit que le coefficient de x^n dans chacune des fonctions

$$F, \quad F', \quad xF', \quad xF'', \quad x^2F'',$$

a pour expression

$$A, \quad \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{\gamma+n}A, \quad nA, \quad \frac{n(\alpha+n)(\beta+n)}{\gamma+n}A, \quad n(n-1)A;$$

or, en multipliant ces coefficients respectivement par $\alpha\beta$, $-\gamma$, $\alpha+\beta+1$, -1, $+1$ et ajoutant, on trouve un résultat nul, donc

$$(x^2-x)F''+[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]F'+\alpha\beta F=0;$$

c'est l'équation différentielle de la série hypergéométrique (¹).

Si $x=-1$, on doit avoir $\alpha+\beta-\gamma<-1$; pour $x=1$, l'équation différentielle se réduit à

$$(\alpha+\beta-\gamma+1)F'(\alpha,\beta,\gamma,1)+\alpha\beta F(\alpha,\beta,\gamma,1)=0,$$

et il faut que α, β, γ vérifient encore l'inégalité $\alpha+\beta-\gamma<-1$; car, dans ce dernier cas, il n'est pas nécessaire que F'' converge, il suffit que son terme général ait une limite.

Deux fonctions de Gauss sont dites *contiguës* lorsque deux de leurs paramètres sont égaux, les troisièmes paramètres ne différant que par une unité. On les désigne, pour abréger, par F suivie d'une parenthèse où l'on indique seulement l'élément qui a varié d'une unité. Il existe quinze relations linéaires distinctes entre la fonction F et deux quelconques de ses contiguës. Nous nous bornerons à démontrer la relation particulièrement utile qui existe entre F, $F(\gamma-1)$ et $F(\gamma+1)$. Si l'on considère le terme général de $xF'(\gamma+1)$, on constate immédiatement que

$$xF'(\gamma+1)=\gamma[F-F(\gamma+1)],$$

d'où, par dérivation, et en tenant compte de la relation précédente,

$$x^2F''(\gamma+1)=\gamma[(\gamma-1)F(\gamma-1)-2\gamma F+(\gamma+1)F(\gamma+1)];$$

si l'on remplace maintenant $F'(\gamma+1)$ et $F''(\gamma+1)$ par leurs valeurs tirées de ces relations dans l'équation différentielle

$$(x^2-x)F''(\gamma+1)+[(\alpha+\beta+1)x-(\gamma+1)]F'(\gamma+1)+\alpha\beta F(\gamma+1)=0,$$

(¹) *Carl Friedrich Gauss Werke*, t. III, p. 207.

on trouve

$$\gamma[(\gamma-1)-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x]\mathrm{F}$$
$$+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)x\,\mathrm{F}(\gamma+1)-\gamma(\gamma-1)(1-x)\,\mathrm{F}(\gamma-1)=0.$$

On obtiendrait les quinze autres relations linéaires par un procédé absolument semblable [1].

Lorsque $x=1$, la relation ci-dessus devient

$$\gamma(\gamma-\alpha-\beta)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma,1)-(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma+1,1)=0;$$

on doit supposer alors $\alpha+\beta-\gamma<0$.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

THÉORÈME. — *Si $f(x)$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence* R, *on a*

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x)+\ldots,$$

pour toutes les valeurs de x et de h vérifiant les inégalités

$$|x|<\mathrm{R},\qquad |h|<\mathrm{R}-|x|.$$

Soit

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

on en déduit

$$f(x+h)=a_0+a_1(x+h)+a_2(x+h)^2+\ldots+a_n(x+h)^n+\ldots,$$

et cette série est absolument convergente, si la valeur absolue de $x+h$ est inférieure à R; d'autre part, ses termes sont développables suivant des séries entières convergentes telles que

$$a_n(x+h)^n=a_nx^n+\frac{n}{1}a_nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{1.2}a_nx^{n-2}h^2+\ldots;$$

mais, en désignant par r, ρ et α_n les valeurs absolues respectives de x, h et a_n, la série positive de terme général

$$\alpha_n(r+\rho)^n=\alpha_nr^n+\frac{n}{1}\alpha_nr^{n-1}\rho+\frac{n(n-1)}{1.2}\alpha_nr^{n-2}\rho^2+\ldots$$

---

[1] *Voir* E. HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, 2e éd., t. I, p. 101-103. C'est d'après cet excellent Ouvrage que nous avons donné la démonstration précédente.

est convergente si l'on a

$$r + \rho < R;$$

par suite, d'après le théorème des séries de séries,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x) + \ldots,$$

pour toutes les valeurs de x et de h vérifiant les inégalités

$$|x| < R, \qquad |h| < R - |x|.$$

La série $f(x+h)$ peut d'ailleurs être convergente pour d'autres valeurs de h que celles indiquées. Soit, par exemple, la série

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots,$$

dont le rayon de convergence est l'unité; on a

$$\frac{1}{1+x+h} = \frac{1}{1+x} - \frac{h}{(1+x)^2} + \frac{h^2}{(1+x)^3} - \ldots,$$

mais

$$\frac{1}{1+x+h} = \frac{1}{1+x} \frac{1}{1 + \dfrac{h}{1+x}};$$

par suite, la série précédente est convergente, non seulement pour les valeurs de h satisfaisant à l'inégalité

$$|h| < 1 - |x|,$$

mais encore pour celles qui vérifient l'inégalité moins restrictive

$$|h| < |1 + x|.$$

L'étude des faits de ce genre constitue l'importante théorie de la *continuation des fonctions* (¹).

Formules de Taylor et de Mac Laurin. — Soit $f(x)$ une fonction explicite d'une variable. Si l'on suppose d'abord cette fonction définie par une série entière de rayon de convergence R, pour

---

(¹) *Voir* TANNERY et MOLK, *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques*, t. I, p. 74-100.

[illegible]

[illegible]

Si l'on suppose maintenant que $f(x)$ est une fonction [illegible], dérivable ainsi que ses n premières dérivées dans un intervalle (x_0, x), on peut se proposer d'obtenir un développement limité analogue au précédent; soit alors λ un coefficient à déterminer de manière que l'on ait, en désignant par p un entier positif,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x_0) + \lambda (x - x_0)^p,$$

ou

$$f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{1.2} f''(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x_0) - \lambda (x - x_0)^p = 0;$$

si l'on considère la fonction

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - \frac{x - t}{1} f'(t) - \frac{(x - t)^2}{1.2} f''(t) - \ldots - \frac{(x - t)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(t) - \lambda (x - t)^p,$$

obtenue par la substitution de t à x_0 dans tous les termes, mais non dans λ, cette fonction $\varphi(t)$ est dérivable pour les valeurs de t comprises entre x_0 et x, car les fonctions qui la composent le sont dans cet intervalle; d'ailleurs, en dérivant $\varphi(t)$, tous les termes se détruisent mutuellement, sauf les deux derniers, par suite,

$$\varphi'(t) = -\frac{(x - t)^n}{1.2\ldots n} f^{(n+1)}(t) + \lambda p (x - t)^{p-1};$$

[illegible] ule pour $t = x_0$ et pour $t = x$, sa dérivée s'annule [illegible] théorème de Rolle, pour une valeur intermé-

diaire $x_0 + \theta\overline{x - x_0}$, le nombre θ étant compris entre o et 1; de là résulte

$$-\frac{(x-x_0)^n(1-\theta)^n}{1.2\ldots n}f^{(n+1)}(x_0+\theta\overline{x-x_0})+\lambda p(x-x_0)^{p-1}(1-\theta)^{p-1}=0,$$

d'où

$$R(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p}}{1.2\ldots n.p}f^{(n+1)}(x_0+\theta\overline{x-x_0}),$$

en désignant par $R(x)$ le *reste*, c'est-à-dire le produit $\lambda(x - x_0)^p$; par conséquent on peut poser

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1}f'(x_0)$$
$$+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}f''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x_0)+R(x);$$

c'est la *formule de Taylor*. Cette formule suppose seulement que $f(x)$ et ses n premières dérivées sont dérivables dans l'intervalle (x_0, x); il n'est pas nécessaire que la $(n+1)^{\text{ième}}$ dérivée soit continue dans cet intervalle, il suffit qu'elle y reste uniforme et finie. L'expression générale du reste trouvée précédemment est due à Roche et à Schlömilch [1]; si l'on y remplace p successivement par $n+1$ et par 1, on en déduit deux formes nouvelles

$$R(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(x_0+\theta\overline{x-x_0}),$$
$$R(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2\ldots n}f^{(n+1)}(x_0+\theta\overline{x-x_0}).$$

La première a été donnée par Lagrange dans la *Théorie des fonctions analytiques* [2] et la seconde par Cauchy dans ses *Exercices de Mathématiques* [3].

Il faut et il suffit, pour que $f(x)$ soit développable en série procédant suivant les puissances entières du binôme $x - x_0$, que cette fonction reste indéfiniment dérivable dans l'intervalle (x_0, x) et que, pour toutes les valeurs de x appartenant à cet intervalle, le reste de la formule de Taylor tende vers zéro, quand n croît

---

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. III, 1858, p. 271 et 384.

(2) *Œuvres de Lagrange*, t. IX, p. 83-84.

(3) *Œuvres complètes*, 2e série, t. VI, p. 40-42.

indéfiniment [1]; car, dans ces conditions, la série de terme général $\frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x_0)$ est convergente, la somme de ses $n+1$ premiers termes $f(x)-\text{R}(x)$ ayant pour limite $f(x)$; alors

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1}f'(x_0)$$
$$+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}f''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x_0)+\ldots;$$

c'est la *série de Taylor* [2].

Si l'on fait $x_0=0$ dans la formule de Taylor, on obtient la *formule de Mac Laurin*

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(0)+\text{R}(x),$$

formule qui exige seulement que la $(n+1)^{\text{ième}}$ dérivée soit uniforme et finie dans l'intervalle $(0, x)$. Quand la fonction $f(x)$ est indéfiniment dérivable dans l'intervalle $(0, x)$ et que, pour toute valeur de x appartenant à cet intervalle, le reste de la formule de Mac Laurin tend vers zéro lorsque n devient infini, on a

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(0)+\ldots,$$

c'est la *série de Mac Laurin* [3].

La méthode que nous avons suivie, pour établir les formules de Taylor et de Mac Laurin, est due en principe à Hommersham Cox [4] et à Rouché.

Application. Dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction de fonction. — On peut déduire de la formule de Taylor l'expression de la dérivée

---

(1) Ces deux points ont été l'objet d'importantes recherches de Pringsheim dans les *Mathematische Annalen*, t. XLII, 1893, p. 153-184, t. XLIV, 1894, p. 41-56 et 57-82. Voir aussi : ERNESTO PASCAL, *Esercizi e note critiche di Calcolo infinitesimale*, p. 176-214.

(2) *Methodus incrementorum directa et inversa*, Londini, 1717, prop. 7, théorème 3, p. 21-23.

(3) *A complete System of fluxions*, Edinburgh, 1742. *Traité des fluxions*, traduction du père Pezenas, 1749, t. II, p. 186-187.

(4) *The Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. VI, 1851, p. 80-81.

d'ordre n d'une fonction de fonction. Soit, par exemple,

$$y = f(x^2)$$

une fonction développable de x^2; si l'on pose

$$u = x^2,$$

et

$$k = (x+h)^2 - x^2,$$

la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x^2)$ par rapport à x est le coefficient de $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ dans la série entière en k

$$f(u+k) = f(u) + \frac{k}{1}f'(u) + \frac{k^2}{1.2}f''(u) + \ldots + \frac{k^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(u) + \ldots;$$

série que l'on peut ordonner par rapport à h, d'après le théorème des séries de séries (*voir* p. 88). Il reste à développer les puissances successives de k afin de calculer dans chacune d'elles le coefficient de h^n; il n'y a pas lieu d'ailleurs de considérer les puissances k^{n+1}, k^{n+2}, ..., puisque h est en facteur dans k; or, si l'on forme le développement

$$k^m = h^m\Big[(2x)^m + \frac{m}{1}(2x)^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}(2x)^{m-2}h^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}(2x)^{m-p}h^p + \ldots\Big],$$

on voit que le coefficient de h^n dans k^m s'obtient en faisant $m+p=n$, c'est-à-dire $p = n-m$, par conséquent il est égal à

$$\frac{m(m-1)\ldots(2m-n+1)}{1.2\ldots(n-m)}(2x)^{2m-n};$$

ce coefficient s'annule pour toutes les valeurs de m non supérieures à $\frac{n-1}{2}$; si donc on écrit l'expression de $y^{(n)}$ en commençant par les dernières dérivées de $f(u)$, on trouve

$$y^{(n)} = (2x)^n f^{(n)}(u) + \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2}f^{(n-1)}(u) + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{1.2\ldots p}(2x)^{n-2p}f^{(n-p)}(u) + \ldots;$$

cette formule est susceptible d'importantes applications.

Développement en série entière d'une fonction d'une variable. — Une fonction explicite d'une variable $f(x)$ ne peut être déve-

loppée en série entière, dans un intervalle $(-a, +a)$, que d'une seule manière (p. 69). La formule de Mac Laurin donne théoriquement ce développement; il faut et il suffit, pour qu'il soit valable, que la fonction soit indéfiniment dérivable dans l'intervalle $(0, x)$ et que, pour toute valeur de la variable appartenant à cet intervalle, le reste mis sous l'une ou l'autre des deux formes

$$R(x) = \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(\theta x), \qquad R(x) = \frac{(1-\theta)^n}{1.2\ldots n} x^{n+1} f^{(n+1)}(\theta x),$$

ait pour limite zéro quand n augmente indéfiniment.

Il y a souvent avantage à étudier d'abord la convergence de la série de terme général $\frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(0)$; si l'on constate qu'elle est divergente, la fonction n'est pas développable; si l'on reconnaît, au contraire, qu'elle est convergente, on s'assure que le reste de la formule de Mac Laurin tend vers zéro pour $n = \infty$. Il ne suffit pas, en effet, comme le croyait Lagrange, que la série soit convergente pour qu'elle représente la fonction $f(x)$, car si, étant convergente, le reste de la formule de Mac Laurin avait une limite non nulle $g(x)$, elle aurait pour somme $f(x) - g(x)$ et non $g(x)$; d'ailleurs Cauchy a donné de ce fait un exemple que nous citerons plus loin.

Une fonction dont la dérivée $n^{\text{ième}}$ reste toujours, dans l'intervalle $(0, x)$, inférieure en valeur absolue à un nombre positif A, quelque grand que soit n, est développable dans cet intervalle; car, si l'on désigne par r la valeur absolue de x, on a

$$|R(x)| < A \frac{r^n}{1.2\ldots n},$$

d'où l'on conclut que $R(x)$ tend vers zéro, la série de terme général $\frac{r^n}{1.2\ldots n}$ étant convergente.

Il est presque toujours impossible de développer une fonction $f(x)$ en série entière au moyen de la formule de Mac Laurin ([1]). En effet, la recherche de la dérivée $n^{\text{ième}}$ présente ordi-

([1]) « La formule de Taylor n'a jamais servi à découvrir un nouveau développement en série; elle est impuissante à donner tous ceux qui sont déjà connus, mais elle a une grande importance analytique. » (H. LAURENT, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 91-92.)

nairement de grandes difficultés et, de plus, l'étude du reste est en général impraticable; même dans des cas très simples, on est conduit à des calculs pénibles ou délicats, alors qu'il est souvent facile de les éviter par l'emploi d'une méthode directe.

Le procédé suivant, dont nous ferons plusieurs fois usage, est particulièrement commode. Il consiste à déduire le développement de $f(x)$ de celui de $f'(x)$ supposé connu. Soit, effectivement,

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots;$$

si l'on considère la série de terme général

$$a_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

dont le rayon de convergence R est le même que celui de $f'(x)$ (p. 73), la somme de cette série ayant pour dérivée $f'(x)$, elle ne diffère de $f(x)$ que par une constante que l'on détermine en faisant $x = 0$; on trouve ainsi que cette constante est égale à $f(0)$, on a par suite

$$f(x) = f(0) + a_0 \frac{x}{1} + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

pour toute valeur de x intérieure à l'intervalle de convergence $(-R, +R)$; le théorème d'Abel permet de décider si ce développement s'étend aux limites $-R$ et $+R$ de l'intervalle.

Lorsque le procédé qui vient d'être indiqué ne réussit pas, on peut chercher à établir directement, au moyen des théorèmes généraux sur les séries, la possibilité de développer en série entière la fonction donnée $f(x)$ dans un certain intervalle; si l'on y parvient, en posant

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

il ne reste plus qu'à effectuer le calcul des coefficients indéterminés $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$; or, R étant le rayon de convergence de la série $f(x)$, les séries dérivées

$$f'(x) = 1 a_1 \quad + 2 a_2 x \quad + 3 a_3 x^2 \quad + \ldots,$$
$$f''(x) = 2.1 a_2 + 3.2 a_3 x + 4.3 a_4 x^2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sont toutes convergentes à l'intérieur de l'intervalle $(-R, +R)$;

en particulier, pour $x = 0$, on trouve

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{1}{1} f'(0), \quad a_2 = \frac{1}{1.2} f''(0), \quad \ldots, \quad a_n = \frac{1}{1.2\ldots n} f^{(n)}(0), \quad \ldots,$$

relations qui déterminent les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, quand on peut calculer les dérivées successives de $f(x)$ pour $x = 0$. Si l'on connaissait, par exemple, la somme $f(x)$ de la série de Lambert, la méthode précédente donnerait l'expression générale d'un nombre premier (p. 53).

Enfin, l'application du théorème des séries de séries permet parfois d'effectuer le développement d'une fonction en série entière dans le cas suivant. Soit y une fonction développable en une série convergente telle que

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

les termes, pour une valeur positive de la variable $x = x_0$, étant développables en séries entières absolument convergentes

$$\begin{array}{l}
a_{0,0} + a_{0,1} x_0 + a_{0,2} x_0^2 + \ldots + a_{0,n} x_0^n + \ldots, \\
a_{1,0} + a_{1,1} x_0 + a_{1,2} x_0^2 + \ldots + a_{1,n} x_0^n + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_{n,0} + a_{n,1} x_0 + a_{n,2} x_0^2 + \ldots + a_{n,n} x_0^n + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{array}$$

si la série positive de terme général

$$|a_{n,0}| + |a_{n,1} x_0| + |a_{n,2} x_0^2| + \ldots$$

est convergente, en posant

$$\lambda_n = a_{0,n} + a_{1,n} + a_{2,n} + \ldots + a_{n,n} + \ldots,$$

la série entière de terme général $\lambda_n x^n$ est convergente pour $x = x_0$; elle est donc convergente, d'après le théorème d'Abel, à l'intérieur de l'intervalle $(-x_0, +x_0)$, et la fonction y est développable suivant la série entière

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_n x^n + \ldots, \qquad -x_0 < x < x_0.$$

THÉORÈME. — *L'inverse de la somme d'une série entière de premier terme non nul est développable en série entière.*

Soit d'abord

$$\varphi(x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots,$$

une série entière où les valeurs absolues des coefficients sont au plus égales à l'unité; cette série est évidemment convergente pour toutes les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-1, +1)$. Or, on peut toujours calculer des nombres $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots$ tels que la série

$$\psi(x) = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots$$

soit convergente à l'intérieur de l'intervalle $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ et vérifie l'égalité

$$\varphi(x)\psi(x) = 1;$$

en effet, les équations

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \beta_1 = 0,\\
&\alpha_2 + \alpha_1\beta_1 + \beta_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\alpha_n + \alpha_{n-1}\beta_1 + \ldots + \alpha_1\beta_{n-1} + \beta_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

déterminent successivement les coefficients $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$, et, comme la valeur absolue de α_n est au plus égale à l'unité, on en déduit

$$|\beta_1| < 1, \quad |\beta_2| < 2, \quad |\beta_3| < 2^2, \quad \ldots, \quad |\beta_n| < 2^{n-1};$$

la série $\psi(x)$ est donc absolument convergente à l'intérieur de l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$; on en conclut que, dans ce même intervalle, la fonction $\varphi(x)$ ne s'annule pas et que son inverse peut être développée en série entière.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction développable suivant la série entière

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

de rayon de convergence R, le premier terme a_0 n'étant pas nul; pour une valeur positive x_0 de x inférieure à R, on peut déterminer un entier m tel que, à partir de $n = m$, on ait

$$|a_n x_0^n| < |a_0|;$$

alors, si r est une constante inférieure à x_0 et au plus petit des nombres

$$\left|\frac{a_0}{a_1}\right|, \quad \sqrt{\left|\frac{a_0}{a_2}\right|}, \quad \sqrt[3]{\left|\frac{a_0}{a_3}\right|}, \ldots \quad \sqrt[m-1]{\left|\frac{a_0}{a_{m-1}}\right|},$$

en posant

$$x = rt,$$

on a

$$\frac{1}{a_0} f(x) = 1 + r\frac{a_1}{a_0}t + r^2\frac{a_2}{a_0}t^2 + \ldots;$$

mais, quel que soit n, la valeur absolue du coefficient de t^n reste inférieure à l'unité; par suite, d'après ce que l'on vient de voir, $\frac{1}{f(x)}$ est développable en série entière dans l'intervalle $\left(-\frac{r}{2}, +\frac{r}{2}\right)$, la plus petite des valeurs absolues des racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

étant certainement supérieure à $\frac{r}{2}$ (¹).

Développement du rapport de deux séries entières. — Il résulte du théorème précédent que le rapport $\frac{g(x)}{f(x)}$ de deux séries entières est toujours développable en série.

En effet, si l'on suppose d'abord que le premier terme de $f(x)$ ne soit pas nul, le rapport $\frac{g(x)}{f(x)}$ est évidemment la somme d'une série entière convergente lorsque x reste à l'intérieur d'un certain intervalle; pour le calcul des coefficients, on peut employer la méthode des coefficients indéterminés ou effectuer la division comme si l'on opérait sur des polynômes.

Si maintenant on suppose nuls les k premiers termes de $f(x)$, le rapport $\frac{g(x)}{f(x)}$ donne encore naissance à une série entière; car, soit

$$f(x) = x^k f_1(x),$$

en désignant par $f_1(x)$ une série entière dont le premier terme

(¹) On établit, mais par des considérations étrangères à notre sujet, que la plus petite des valeurs absolues des racines de l'équation $f(x) = 0$ est le rayon de convergence du développement de $\frac{1}{f(x)}$. *Voir* à propos du théorème qui vient d'être démontré : JULES TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. 174-178.

n'est pas nul; le rapport $\frac{g(x)}{f_1(x)}$, pour toutes les valeurs de x intérieures à un certain intervalle, est développable en une série entière telle que

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots;$$

par suite, pour ces mêmes valeurs de x, sauf la valeur zéro, on a

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{a_0}{x^k} + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{x} + a_k + a_{k+1} x + a_{k+2} x^2 + \ldots.$$

Le rapport $\frac{g(x)}{f(x)}$ se présente alors comme étant la somme d'un polynôme entier en $\frac{1}{x}$, croissant indéfiniment lorsque x tend vers zéro, et d'une série entière dont la somme est finie quand x devient nul.

Développement d'une fraction rationnelle. Séries récurrentes. — On vient de voir dans quelles conditions le rapport de deux séries entières est développable en série entière. Un cas particulier important est celui où les deux séries se réduisent à deux polynômes.

Soient donc

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m$$

et

$$g(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_p x^p$$

deux polynômes entiers en x, premiers entre eux, et de degrés respectifs m et p. Si $f(x)$ a k racines nulles, la fraction rationnelle $\frac{g(x)}{f(x)}$ est développable, d'après ce qui a été dit, suivant une série telle que

$$\frac{a_0}{x^k} + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{x} + a_k + a_{k+1} x + a_{k+2} x^2 + \ldots,$$

et l'on est assuré que ce développement est valable pour toutes les valeurs de x comprises dans un certain intervalle, sauf pour la valeur zéro. Si $f(x)$ n'a pas de racines nulles, on a simplement un développement de la forme

$$\frac{g(x)}{f(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

pour toutes les valeurs de x comprises dans un certain intervalle. Dans ce dernier cas, en supposant par exemple m supérieur à p, on peut déterminer les coefficients a_0; a_1, ..., a_n, ... au moyen des équations

$$
\begin{array}{l}
A_0 a_0 = B_0, \\
A_0 a_1 + A_1 a_0 = B_1, \\
A_0 a_2 + A_1 a_1 + A_2 a_0 = B_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
A_0 a_p \quad + A_1 a_{p-1} + \dots + A_p a_0 = B_p, \\
A_0 a_{p+1} + A_1 a_p \quad + \dots + A_p a_1 + A_{p+1} a_0 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
A_0 a_m \quad + A_1 a_{m-1} + \dots + A_{m-1} a_1 + A_m a_0 = 0, \\
A_0 a_{m+1} + A_1 a_m \quad + \dots + A_{m-1} a_2 + A_m a_1 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.
\end{array}
$$

Les coefficients de la série vérifient par conséquent, à partir d'une certaine valeur de n, la relation linéaire

$$A_0 a_{m+n} + A_1 a_{m+n-1} + \dots + A_{m-1} a_{n-1} + A_m a_n = 0;$$

cette relation est la *relation de récurrence* de la série entière

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

qui est dite *récurrente*. La suite formée par les constantes

$$A_0, \quad A_1, \quad \dots, \quad A_m,$$

s'appelle l'*échelle de récurrence* de cette série.

Ainsi, toute fraction rationnelle est développable en une série entière récurrente de rayon de convergence non nul. Inversement toute série entière récurrente de rayon de convergence non nul est le développement d'une fraction rationnelle.

En effet, soit

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

une série entière de rayon de convergence non nul, et dont les coefficients, à partir d'un certain rang, vérifient la relation de récurrence

$$A_0 a_{m+n} + A_1 a_{m+n-1} + \dots + A_{m-1} a_{n-1} + A_m a_n = 0;$$

en posant

$$f(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m,$$

le produit de la série entière par le polynôme $f(x)$ est la somme de la série entière

$$A_0 a_0 + (A_0 a_1 + A_1 a_0)x + (A_0 a_2 + A_1 a_1 + A_2 a_0)x^2 + \ldots;$$

or, le coefficient de x^{m+n}, qui a pour expression

$$A_0 a_{m+n} + A_1 a_{m+n-1} + \ldots + A_{m-1} a_{n-1} + A_m a_n,$$

devenant nul, par hypothèse, à partir d'une certaine valeur de n, la série précédente se réduit à un polynôme $g(x)$; la série considérée représente donc le développement de la fraction rationnelle $\frac{g(x)}{f(x)}$.

Les suites récurrentes, dont l'usage est continuel dans la théorie des nombres, ont été successivement étudiées par Cassini, Moivre, Euler, Lagrange [1].

Application. Fonctions numériques de Lucas. — Soient

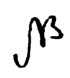
$$U = \frac{x}{1 - px + qx^2}, \qquad V = \frac{2 - px}{1 - px + qx^2};$$

ces fractions rationnelles sont toutes deux développables suivant des séries entières récurrentes ayant un même rayon de convergence non nul; on peut donc poser

$$U = U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \ldots + U_n x^n + \ldots,$$
$$V = V_0 + V_1 x + V_2 x^2 + \ldots + V_n x^n + \ldots;$$

si l'on multiplie chacune des séries précédentes par le dénominateur commun des fractions rationnelles, on obtient immédiatement les relations de récurrence

$$U_{n+2} = pU_{n+1} - qU_n,$$
$$V_{n+2} = pV_{n+1} - qV_n;$$



[1] CASSINI, *Histoire de l'Académie royale des Sciences*, t. I, p. 309-310. — MOIVRE, *Miscellanea analytica*, p. 27. — EULER, *Introductio in Analysin infinitorum*, t. I, chap. XIII et XVII. — LAGRANGE, *Œuvres*, t. I, III, IV, V.

les valeurs initiales de U_n et de V_n sont d'ailleurs

$$U_0 = 0, \qquad U_1 = 1,$$
$$V_0 = 2, \qquad V_1 = p.$$

Les fonctions numériques U_n et V_n, introduites par Lucas [1], ont été nommées par lui *fonctions numériques du second ordre*. Ces fonctions, qui présentent une grande analogie avec les fonctions circulaires et les fonctions hyperboliques, sont d'un emploi avantageux dans un grand nombre de questions d'Arithmétique supérieure [2].

La fonction V_n s'exprime au moyen de la fonction U_n par la formule suivante

$$V_n = 2U_{n+1} - pU_n,$$

que l'on trouve en annulant le coefficient de x^{n+1} dans l'équation

$$(2 - px)U - xV = 0.$$

Si maintenant on désigne par a et b les racines, supposées réelles, de l'équation

$$x^2 - px + q = 0,$$

on peut mettre U sous la forme

$$U = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{1-ax} - \frac{1}{1-bx}\right);$$

les deux termes de cette différence sont développables en séries entières de rayon de convergence non nul; par conséquent

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}.$$

On a pareillement

$$V = \frac{1}{1-ax} + \frac{1}{1-bx},$$

et, par suite,

$$V_n = a^n + b^n.$$

On obtient diverses suites remarquables en donnant aux con-

---

(1) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. III, 1877, p. 369-370.

(2) On trouvera la théorie complète des fonctions numériques du second ordre dans la *Théorie des nombres* de LUCAS, t. I, p. 308-331.

Suite de Fermat 0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, ... $a = \frac{3\pm 1}{2}$
" " Pell 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, $a = 1 \pm \sqrt{2}$
" " Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, $a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

stantes p et q des valeurs numériques particulières. C'est ainsi que, pour $p=3$, $q=2$, on trouve les *suites de Fermat*, et, pour $p=2$, $q=-1$ les *suites de Pell;* mais le cas le plus intéressant est celui où l'on prend $p=1$, $q=-1$; la relation de récurrence des fonctions U_n devient alors

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n;$$

la suite correspondante

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots,$$

est dite *suite de Fibonacci* (¹). Le terme général de cette suite a pour expression

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

La suite de Fibonacci, que l'on appelle aussi quelquefois *suite de Lamé,* possède de multiples et curieuses propriétés.

EXERCICES.

1° Les séries

$$(1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \ldots,$$

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \ldots,$$

sont-elles uniformément convergentes dans l'intervalle $(0, 1)$?

2° Étudier les séries

$$\frac{x}{a_1} + \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{x^3}{a_3^3} + \ldots + \frac{x^n}{a_n^n} + \ldots,$$

$$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2}\frac{x}{a_2} + \ldots + \frac{1}{x-a_n}\frac{x^{n-1}}{a_n^{n-1}} + \ldots,$$

les nombres non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ croissant avec n.

WEIERSTRASS.

(¹) *Il Liber abbaci* (*Scritti di Leonardo Pisano,* éd. Boncompagni, t. I, p. 283-284). LAMÉ et BINET ont été amenés à considérer la suite de Fibonacci dans de savantes recherches.

3° Démontrer que la série entière

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$ si, en posant

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n,$$

le rapport

$$\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n}$$

tend vers une limite quand n augmente indéfiniment.

FROBENIUS.

4° Étudier la série entière

$$\varphi_m(x) = 1 + \frac{x}{m} + \frac{1}{1.2}\,\frac{x^2}{m(m+1)} + \frac{1}{1.2.3}\,\frac{x^3}{m(m+1)(m+2)} + \ldots,$$

dite *série de Legendre*, former son équation différentielle et établir la relation

$$\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x) = \frac{x}{m(m+1)}\,\varphi_{m+2}(x).$$

5° Développer suivant les puissances entières décroissantes de x l'expression

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})^m + (x - \sqrt{x^2 - 1})^m,$$

l'exposant m étant entier.

LAGRANGE.

6° En désignant par X_n un polynôme de Legendre, faire voir que l'équation

$$n(n+1)X_n^2 - (1 - x^2)X_n'^2 = 0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$.

HERMITE.

7° Trois dérivées consécutives du polynôme X_n vérifient la relation de récurrence

$$(x^2 - 1)X_n^{(p)} + 2(p-1)x X_n^{(p-1)} - (n+p-1)(n-p+2)X_n^{(p-2)} = 0.$$

it $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ la somme de la série hypergéométrique, on a

$$\begin{aligned} , \beta, \gamma, x) - (\gamma+1)[\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\,F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x) \\ - (\alpha+1)(\beta+1)x(1-x)\,F(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2, x) = 0. \end{aligned}$$

GAUSS.

9° Si la fonction $f(x)$ est développable dans l'intervalle $(x, x+h)$, démontrer la formule

$$f(x+h)-f(x)=h\left[f'\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f'''\left(x+\frac{h}{2}\right)+\ldots\right].$$

JOURJON.

10° Montrer que toute fonction $f(x)$, dérivable ainsi que ses n premières dérivées dans l'intervalle $(0, x)$, peut être représentée par le développement

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(x)-\frac{x^2}{1.2}f''(x)+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(\theta x).$$

JEAN BERNOULLI.

BIBLIOGRAPHIE.

BURKHARDT (Heinr.) et MEYER (W. Franz), Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Leipzig, Teubner, 1899, in-8°, t. II, p. 34-36, 74-80.

CESÀRO (Ernesto), Elementi di Calcolo infinitesimale. Napoli, Alvano, 1899, in-8°, p. 56-93.

DARBOUX (G.), Mémoire sur les fonctions discontinues (*Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 2° série, t. IV, 1875, p. 57-112, et t. VIII, 1879, p. 195-202).

HEINE (E.), Handbuch der Kugelfunctionen, 2° éd. Berlin, Reimer, 1878-1881, 2 vol. in-8°.

JORDAN (C.), Cours d'Analyse de l'École polytechnique, 2° éd. Paris, Gauthier-Villars, 1893, t. I, p. 245-272 et p. 310-368.

TANNERY (Jules), Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Paris, Hermann, 1886, in-8°, p. 132-216.

TANNERY (Jules) et MOLK (Jules), Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Paris, Gauthier-Villars, 1893, in-8°, t. I, p. 33-100.

TODHUNTER (I.), An elementary treatise on Laplace's functions, Lamé's functions, and Bessel's functions. London, Macmillan, 1875, 1 vol. in-8°.

IV.

FONCTION EXPONENTIELLE.

On donne le nom de *fonction exponentielle* à la fonction transcendante entière définie par la série

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots,$$

dont le rayon de convergence est infini; cette série est dite *série exponentielle*.

On retrouve la série exponentielle en dérivant ses termes; la fonction exponentielle jouit donc de la propriété remarquable de se reproduire indéfiniment par la dérivation.

Soit $f(x)$ la somme de la série exponentielle; toutes ses dérivées lui étant égales, le développement en série de $f(x+h)$, quels que soient les nombres x et h (p. 88), se réduit à

$$f(x+h)=f(x)f(h),$$

résultat que l'on obtiendrait aussi au moyen de la multiplication des séries. On en déduit successivement

$$f(x)f(x)=f(2x),\quad f(x)f(2x)=f(3x),\quad \ldots,\quad f(x)f(\overline{n-1}\,x)=f(nx),$$

d'où

$$f^n(x)=f(nx).$$

Cette relation subsiste quel que soit n. En effet, soit d'abord $n=\frac{p}{q}$, les entiers p et q étant positifs; on a

$$f^q\left(\frac{px}{q}\right)=f(px)=f^p(x),$$

mais la fonction $f(x)$ est toujours positive, car

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

par suite

$$f\left(\frac{px}{q}\right) = f^{\frac{p}{q}}(x).$$

Soit maintenant n irrationnel et positif; si l'on considère un nombre variable rationnel et positif n_k ayant n pour limite, on a

$$f^{n_k}(x) = f(n_k x);$$

le premier membre, d'après la définition même d'une puissance irrationnelle (p. 14), a pour limite $f^n(x)$, et le second, à cause de la continuité de la fonction $f(x)$, tend vers $f(nx)$; par conséquent, dans ce cas encore,

$$f^n(x) = f(nx).$$

Soit enfin n négatif; en posant $n = -m$, de l'égalité

$$f(-mx)f(mx) = f(0) = 1,$$

on tire

$$f(nx) = \frac{1}{f^m(x)} = f^n(x).$$

Donc, pour toute valeur de n et de x,

$$f(nx) = f^n(x),$$

ou bien, en permutant x et n,

$$f(nx) = f^x(n);$$

on désigne par e la constante $f(1)$, somme de la série positive

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

par suite, pour $n = 1$,

$$f(x) = e^x,$$

c'est-à-dire

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

la fonction exponentielle se trouve ainsi mise sous sa forme habi-

tuelle. C'est Newton qui le premier est arrivé à ce résultat (¹).

On peut se demander si la fonction exponentielle est la seule fonction présentant la particularité de ne pas être altérée par la dérivation. Il est facile de répondre à cette question. Soit, en effet, y une fonction vérifiant l'équation différentielle

$$y' = y;$$

la fonction

$$z = e^x$$

est une solution de l'équation précédente, puisque

$$z' = z;$$

par conséquent

$$zy' - yz' = 0.$$

d'où, λ désignant une constante arbitraire,

$$y = \lambda e^x;$$

telle est la forme générale des fonctions égales à leurs dérivées.

La fonction e^x, d'après ce qui précède, est positive et croissante pour toute valeur de x; elle reste toujours identique à elle-même lorsqu'on la dérive; enfin, elle est susceptible des mêmes opérations qu'une puissance, puisque la variable y joue le rôle d'un véritable exposant.

Application. Développement du polynôme $(a + b + \ldots + l)^m$. — Lagrange (²), dans ses *Leçons sur le calcul des fonctions,* indique, à propos de la fonction e^x, un procédé assez inattendu pour obtenir le développement de la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un polynôme.

Le coefficient de x^m dans le développement de

$$e^{(a+b+\ldots+l)x},$$

a pour expression

$$\frac{(a+b+\ldots+l)^m}{1.2\ldots m};$$

(¹) *Analysis per æquationes*... (*Isaaci Newtoni... opuscula mathematica*, éd. Castillon, t. I, p. 20-21 et p. 318). La méthode que nous avons suivie pour obtenir la somme de la série exponentielle est celle qui a été employée par Cauchy [dans] son *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique* (*Œuvres complètes* t. III, p. 100-103).

(²) [Œu]vres, t. X, p. 38-39.

d'autre part, si l'on effectue le produit des séries

$$e^{ax} = 1 + \frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{1.2} + \ldots,$$
$$e^{bx} = 1 + \frac{bx}{1} + \frac{b^2x^2}{1.2} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$e^{lx} = 1 + \frac{lx}{1} + \frac{l^2x^2}{1.2} + \ldots,$$

le coefficient de x^m dans ce produit multiplié par $1.2\ldots m$ sera égal à $(a + b + \ldots + l)^m$. Or ce coefficient est composé d'autant de termes de la forme

$$\frac{a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta\ldots1.2\ldots\lambda},$$

qu'il existe pour α, β, ..., λ de systèmes différents vérifiant la relation

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = m;$$

on a donc

$$(a + b + \ldots + l)^m = \sum \frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots\alpha \;\; 1.2\ldots\beta \;\ldots\; 1.2\ldots\lambda} a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda,$$

les entiers non négatifs α, β, ..., γ étant tels que leur somme reste toujours égale à m.

Limite de l'expression $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ **pour** $n = \infty$. — Soit d'abord x positif; il y a lieu de distinguer trois cas :

1° *n est un entier positif.* — On a

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{x^2}{n^2} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}\frac{x^m}{n^m} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots1}{1.2\ldots n}\frac{x^n}{n^n},$$

ou

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{x^m}{1.2\ldots m} + \ldots$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{x^n}{1.2\ldots n};$$

les coefficients des puissances successives de x sont tous positifs et leur valeur augmente avec n; les termes du développement vont donc en croissant en même temps que leur nombre s'élève, mais ils restent toujours moindres que les termes correspondants de la série exponentielle; on en conclut que l'expression $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ a une limite λ au plus égale à e^x : d'ailleurs λ est supérieur à la limite de la somme des m premiers termes du développement de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, c'est-à-dire à $S_m(x)$, en désignant par $S_m(x)$ la somme des m premiers termes de la série exponentielle; or, on peut prendre m assez grand pour que le reste $e^x - S_m(x)$ soit inférieur à un nombre positif arbitrairement petit σ; de là résulte à plus forte raison

$$0 < \lambda - S_m(x) < \sigma;$$

la limite de $S_m(x)$ est par suite λ, d'où $\lambda = e^x$. Ainsi la limite de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ pour $n=\infty$ est e^x (¹).

2° *n est fractionnaire ou irrationnel positif.* — Si m est la partie entière de n, on a

$$\left(1+\frac{x}{m+1}\right)^m < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{m}\right)^{m+1},$$

mais

$$\left(1+\frac{x}{m+1}\right)^m = \left(1+\frac{x}{m+1}\right)^{m+1} : \left(1+\frac{x}{m+1}\right),$$

et

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m+1} = \left(1+\frac{x}{m}\right)^m \cdot \left(1+\frac{x}{m}\right);$$

ces deux expressions ayant pour limite e^x, il en est de même de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

3° *n est quelconque et négatif.* — En posant $n = -(m+x)$, on trouve

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{m}\right)^m \left(1+\frac{x}{m}\right)^x;$$

(¹) Cette démonstration est due à Darboux qui la donnait dans le cours qu'il professait à l'École normale vers 1880; nous l'exposons d'après les *Éléments* [illegible] *fonctions elliptiques* de Tannery et Molk, t. I, p. 101-102.

la valeur absolue de n devenant infinie, m croît au delà de toute limite, et l'on voit que, dans ce cas encore, $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ tend vers e^x.

Soit maintenant x négatif; si l'on fait $-x=y$ et $-n=m$, on a

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{m}\right)^m=1,$$

la limite de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ est par suite e^{-y}, c'est-à-dire e^x.

Donc, quels que soient x et n, la limite de l'expression $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, pour $n=\infty$, est e^x.

Limite de l'expression $\frac{x^m}{e^x}$ pour $x=+\infty$. — On suppose l'exposant m positif; soit alors p un entier supérieur à m, on a

$$e^x > \frac{x^p}{1.2\ldots p},$$

d'où

$$\frac{e^x}{x^m} > \frac{x^{p-m}}{1.2\ldots p};$$

la limite de $\frac{x^m}{e^x}$ pour $x=+\infty$ est donc nulle.

Application. — La dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction

$$y=e^{-\frac{1}{x^2}}$$

est la somme de termes tels que

$$\mathrm{A}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m};$$

si l'on pose $\frac{1}{x^2}=t$, cette expression devient

$$\mathrm{A}\frac{t^{\frac{m}{2}}}{e^t},$$

et sa limite est zéro quand t augmente indéfiniment; ainsi toutes les dérivées de $e^{-\frac{1}{x^2}}$ sont nulles pour $x=0$.

Soit maintenant $g(x)$ une fonction développable en série entière; si l'on applique la formule de Mac Laurin à la fonction

$$f(x) = g(x) + e^{-\frac{1}{x^2}},$$

on obtient

$$f(x) = g(0) + \frac{x}{1} g'(0) + \frac{x^2}{1.2} g''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} g^{(n)}(0) - R(x);$$

le reste $R(x)$ se compose de deux parties, l'une qui provient de $g(x)$ a pour limite zéro, et l'autre qui provient de $e^{-\frac{1}{x^2}}$ a nécessairement pour limite $e^{-\frac{1}{x^2}}$, puisque le premier membre est égal à $g(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$; par conséquent, la série de terme général

$$\frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(0),$$

bien que convergente, représente non pas $f(x)$ mais $g(x)$. Cet exemple, indiqué par Cauchy (1), montre l'importance de l'étude du reste dans le développement d'une fonction en série (p. 94).

Polynômes de Hermite. — Soit

$$y = e^{-x^2};$$

la dérivée $n^{\text{ième}}$ de y est de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = P_n e^{-x^2},$$

en désignant par P_n un polynôme entier en x de degré n.

On appelle souvent les polynômes ainsi définis *polynômes de Hermite,* du nom de l'illustre savant qui les a étudiés (2).

L'équation $P_n = 0$ a ses n racines réelles et inégales. En effet, la fonction continue y s'annulant pour $x = -\infty$ et pour $x = +\infty$, d'après le théorème de Rolle y' a une racine au moins, a_1, com-

(1) *Résumé des Leçons données à l'École royale polytechnique sur le Calcul infinitésimal* (*Œuvres complètes*, 2e série, t. IV, p. 229-230).

(2) *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVIII, 1864, p. 94-96.

prise entre ces limites pour lesquelles d'ailleurs y' s'annule; mais alors y'' a une racine au moins entre $-\infty$ et a_1, et une racine au moins entre a_1 et $+\infty$; en continuant toujours ainsi, on voit finalement que $y^{(n)}$, et par suite P_n, a ses n racines réelles et inégales.

Trois polynômes consécutifs vérifient la relation de récurrence

$$P_{n+1} + 2xP_n + 2nP_{n-1} = 0;$$

car, en dérivant n fois l'équation

$$y' + 2xy = 0,$$

on obtient

$$y^{(n+1)} + 2xy^{(n)} + 2ny^{(n-1)} = 0,$$

et il suffit de diviser par e^{-x^2} pour trouver le résultat énoncé.

Enfin, si dans l'égalité précédente on remplace n par $n+1$, elle devient

$$y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} + 2(n+1)y^{(n)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2}{dx^2}(P_n e^{-x^2}) + 2x\frac{d}{dx}(P_n e^{-x^2}) + 2(n+1)P_n e^{-x^2} = 0,$$

d'où

$$P''_n - 2xP'_n + 2nP_n = 0;$$

c'est l'équation différentielle des polynômes P_n.

Fonctions de Bessel. — On a

$$e^{\frac{tx}{2}} = 1 + \frac{t}{1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{t^2}{1.2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots + \frac{t^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \ldots$$

$$e^{-\frac{x}{2t}} = 1 - \frac{t^{-1}}{1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{t^{-2}}{1.2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \ldots + (-1)^n\frac{t^{-n}}{1.2\ldots n}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \ldots;$$

le terme général de la série obtenue par la multiplication des deux séries précédentes a pour expression

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n\left[\frac{t^n}{1.2\ldots n} - \frac{1}{1}\,\frac{t^{n-2}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{1}{1.2}\,\frac{t^{n-4}}{1.2\ldots(n-2)} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{1}\,\frac{t^{-n+2}}{1.2\ldots(n-1)} + (-1)^n\frac{t^{-n}}{1.2\ldots n}\right];$$

d'ailleurs, en désignant par r la valeur absolue de x et par ρ celle de t, la série positive de terme général

$$\left(\frac{r}{2}\right)^n \left[\frac{\rho^n}{1.2\ldots n} + \frac{1}{1}\,\frac{\rho^{n-2}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{1}{1.2}\,\frac{\rho^{n-4}}{1.2\ldots(n-2)} + \ldots + \frac{1}{1}\,\frac{\rho^{-n+2}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{\rho^{-n}}{1.2\ldots n}\right]$$

est convergente et a pour somme $e^{\frac{r}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)}$; on peut donc ordonner le produit des deux séries $e^{\frac{tx}{2}}$ et $e^{-\frac{x}{2t}}$, d'abord par rapport aux puissances successives de t, puis par rapport à celles de t^{-1} (p. 48); on constate alors que le coefficient de t^n est

$$\mathrm{J}_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1.2\ldots n} - \frac{1}{1}\,\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1.2\ldots(n+1)} + \frac{1}{1.2}\,\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{1.2\ldots(n+2)} - \ldots,$$

et celui de t^{-n}

$$(-1)^n \mathrm{J}_n(x),$$

par suite

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \mathrm{J}_0(x) + \mathrm{J}_1(x)t + \mathrm{J}_2(x)t^2 + \ldots + \mathrm{J}_n(x)t^n + \ldots - \mathrm{J}_1(x)t^{-1} + \mathrm{J}_2(x)t^{-2} - \mathrm{J}_3(x)t^{-3} + \ldots;$$

en particulier, pour $t = 1$, on trouve

$$1 = \mathrm{J}_0(x) + 2\mathrm{J}_2(x) + 2\mathrm{J}_4(x) + \ldots.$$

On donne le nom de *fonction de Bessel* à la somme de la série entière

$$\mathcal{J}_m = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^m}{1.2\ldots m}\left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1.(m+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2(m+1)(m+2)} - \ldots\right],$$

dont le rayon de convergence est infini, et on représente une telle fonction par $\mathrm{J}_m(x)$ (¹). C'est dans un Mémoire sur les pertur-

(¹) La définition des fonctions de Bessel au moyen du développement de l'exponentielle $e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ a été proposée par Schlömilch (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. II, 1857, p. 137-165).

bations planétaires (¹) que Bessel a été amené à considérer ce genre de fonctions; mais auparavant, Fourier, dans sa *Théorie analytique de la chaleur* (²), avait étudié la série précédente dans le cas où $m = 0$. Les fonctions de Bessel sont appelées parfois aussi *fonctions cylindriques*, à cause de leur importance dans les recherches relatives au potentiel d'un cylindre; elles se présentent également en Mécanique céleste, dans la théorie du mouvement elliptique.

Le terme général de $J_m(x)$ est

$$(-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}}{1.2\ldots n.1.2\ldots(m+n)};$$

si l'on y remplace m par $m-1$, on voit que le terme de degré $m+2n-1$ de $J_{m-1}(x)$ est égal à

$$(-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n-1}}{1.2\ldots n.1.2\ldots(m+n-1)};$$

enfin, si l'on substitue $m+1$ à m, et $n-1$ à n, dans le terme général de $J_m(x)$, on obtient le terme de degré $m+2n-1$ de $J_{m+1}(x)$, c'est-à-dire

$$(-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n-1}}{1.2\ldots(n-1).1.2\ldots(m+n)}.$$

La forme de ces deux dernières expressions montre qu'en ajoutant, puis retranchant les termes correspondants de $J_{m-1}(x)$ et $J_{m+1}(x)$, ces fonctions vérifient les égalités

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x),$$
$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x);$$

ces deux relations sont caractéristiques des fonctions de Bessel.

(¹) *Abhandlungen von Friedrich Wilhelm Bessel*, éd. Engelmann, t. I, p. 93.

(²) *Œuvres de Fourier*, éd. Darboux, t. I, p. 332. On pourrait faire remonter l'origine des fonctions cylindriques jusqu'à Daniel Bernoulli et Euler qui les ont rencontrées incidemment.

La première donne successivement

$$J_{m-2}(x) + J_m(x) = 2\frac{m-1}{x} J_{m-1}(x),$$

$$J_m(x) + J_{m+2}(x) = 2\frac{m+1}{x} J_{m+1}(x),$$

d'où

$$\begin{aligned} &J_{m-2}(x) + 2J_m(x) + J_{m+2}(x) \\ &= \frac{2m}{x}[J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x)] - \frac{2}{x}[J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$J_{m-2}(x) + 2J_m(x) + J_{m+2}(x) = \frac{4m^2}{x^2} J_m(x) - \frac{4}{x} J'_m(x).$$

D'autre part, de la seconde relation on tire

$$J_{m-2}(x) - J_m(x) = 2J'_{m-1}(x),$$
$$J_m(x) - J_{m+2}(x) = 2J'_{m+1}(x),$$

d'où

$$J_{m-2}(x) - 2J_m(x) + J_{m+2}(x) = 4J''_m(x);$$

en retranchant cette dernière relation de la relation analogue trouvée précédemment, on obtient

$$J''_m(x) + \frac{1}{x} J'_m(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) J_m(x) = 0;$$

c'est l'équation différentielle des fonctions $J_m(x)$, dite *équation de Bessel;* elle a été donnée par Bessel dans son Mémoire déjà cité sur les perturbations planétaires ([1]).

Nombres de Bernoulli. — Soit

$$y = \frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1};$$

cette expression peut se mettre sous la forme

$$y = \frac{x}{2} + \frac{x}{e^x-1}.$$

La fonction $\frac{e^x-1}{x}$ étant développable en série entière de premier

---

([1]) *Abhandlungen von Friedrich Wilhelm Bessel*, éd. Engelmann, t. I, p. 97.

terme non nul, il en est de même de son inverse (p. 96-98), et, par suite, de y; mais, y ne change pas quand on remplace x par $-x$; il en résulte que l'on peut poser

$$\frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 + B_1\frac{x^2}{1.2} - B_2\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots - (-1)^n B_n \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} - \ldots,$$

d'où

$$x\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = 1 + 2^2 B_1 \frac{x^2}{1.2} - 2^4 B_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$
$$- (-1)^n 2^{2n} B_n \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} - \ldots \text{ (1)}.$$

Or

$$(e^x - e^{-x})_0^{(2n+1)} = 2, \qquad (e^x + e^{-x})_0^{(2n)} = 2,$$
$$(e^x - e^{-x})_0^{(2n)} = 0, \qquad (e^x + e^{-x})_0^{(2n+1)} = 0;$$

alors, si l'on désigne par z la fonction

$$x\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},$$

en prenant la dérivée $(2n+1)^{\text{ième}}$ des deux membres de l'égalité

$$z(e^x - e^{-x}) = x(e^x + e^{-x}),$$

on trouve, pour $x = 0$,

$$\frac{2n+1}{1} z_0^{(2n)} + \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3} z_0^{(2n-2)} + \ldots$$
$$+ \frac{(2n+1)2n}{1.2} z_0'' + z_0 = 2n+1,$$

mais

$$z_0^{(2n)} = -(-1)^n 2^{2n} B_n, \quad z_0^{(2n-2)} = -(-1)^{n-1} 2^{2n-2} B_{n-1}, \quad \ldots, \quad z_0'' = 2^2 B_1,$$

et, en substituant, on voit que les coefficients $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$ vérifient la relation de récurrence

$$\frac{2n+1}{1} 2^{2n} B_n - \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3} 2^{2n-2} B_{n-1} + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{(2n+1)2n}{1.2} 2^2 B_1 + (-1)^n 2n = 0,$$

---

(1) EULER, *Institutiones Calculi differentialis*, partie 2, § 114.

relation qui permet de calculer successivement B_1, B_2, ... On obtient de cette manière

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30},$$

$$B_5 = \frac{5}{66}, \quad B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}, \quad B_8 = \frac{3617}{510}.$$

Les nombres B_1, B_2, ..., B_n, ... ainsi déterminés ont été appelés par Moivre et Euler *nombres de Bernoulli*, du nom de Jacques Bernoulli qui en fit usage dans son *Ars conjectandi* (¹).

La somme des puissances des nombres entiers peut s'exprimer au moyen des nombres de Bernoulli. Soit, en effet,

$$y = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(n-1)x};$$

on en déduit

$$y^{(p)} = 1^p e^x + 2^p e^{2x} + \ldots + (n-1)^p e^{(n-1)x},$$

d'où

$$y_0^{(p)} = 1^p + 2^p + \ldots + (n-1)^p.$$

Or

$$y = \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1};$$

mais

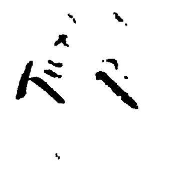
$$\frac{e^{nx} - 1}{x} = n + n^2 \frac{x}{1.2} + n^3 \frac{x^2}{1.2.3} + \ldots$$

et

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} - B_1 \frac{x^2}{1.2} - B_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots;$$

on peut donc poser

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + \ldots,$$



le coefficient a_p étant donné par la relation

$$a_p = \frac{n^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)} - \frac{1}{2}\,\frac{n^p}{1.2\ldots p} + \frac{B_1}{1.2}\,\frac{n^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)} - \ldots;$$

d'ailleurs

$$y_0^{(p)} = 1.2\ldots p a_p,$$

(¹) Partie 2, chap. III, p. 97. — La table des 62 premiers nombres de Ber-[nou]lli a été calculée par Adams, *Journal für die reine und angewandte Mathe[mati]k*, t. LXXXV, 1878, p. 269-272. On doit à Ely une bibliographie des nombres [de Bern]oulli; voir : *American Journal of Mathematics*, t. V, 1882, p. 228-235.

par suite, si s_p désigne la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des $n-1$ premiers nombres entiers, on a

$$s_p = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2}n^p + pB_1\frac{n^{p-1}}{1.2} - p(p-1)(p-2)B_2\frac{n^{p-3}}{1.2.3.4} + \ldots \text{ [1]}.$$

Ainsi

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 = \frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n-1)^4 = \frac{n^5}{5} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On déduit immédiatement de l'expression de s_p que la limite, pour $n = \infty$, du rapport

$$\frac{1^p + 2^p + \ldots + (n-1)^p}{n^{p+1}}$$

est égale à $\frac{1}{p+1}\cdot$ Ce résultat, entrevu par Archimède, puis retrouvé tour à tour par Cavalieri, Fermat et Roberval, est intéressant pour l'histoire des origines du Calcul intégral.

Polynômes de Bernoulli. — On nomme *polynôme de Bernoulli*, et l'on représente par $B_p(x)$, tout polynôme s'annulant avec x et vérifiant la relation

$$B_p(x+1) - B_p(x) = x^p,$$

où p désigne un entier positif ou nul [2].

---

[1] Cette formule est énoncée sans démonstration dans l'*Ars conjectandi* (p. 97); pour en faire ressortir l'utilité, Jacques Bernoulli prétend avoir calculé *intra semi-quadrantem horae* la somme des $10^{\text{ièmes}}$ puissances des mille premiers entiers, et il en donne l'expression

91 409 924 241 424 243 424 241 924 242 500.

A l'aide de ce résultat, le lecteur pourra, s'il le désire, vérifier l'assertion de Bernoulli.

[2] Nous avons emprunté cette définition des polynômes de Bernoulli, ainsi que l'exposé de leurs principales propriétés, à un travail d'Appell publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. VI, 1887, p. 312-321.

Soit m le degré de $B_p(x)$; la différence

$$B_p(x+1) - B_p(x)$$

est un polynôme de degré $m-1$; mais, cette différence étant égale à x^p, son degré est p, par suite $m = p+1$, et l'on peut poser

$$B_p(x) = A_0 x^{p+1} + A_1 x^p + A_2 x^{p-1} + \ldots + A_{p-1} x^2 + A_p x;$$

si l'on forme alors la différence $B_p(x+1) - B_p(x)$, en égalant à l'unité le coefficient de x^p et annulant les coefficients des autres puissances de x, on obtient

$$\frac{p+1}{1} A_0 = 1,$$

$$\frac{p}{1} A_1 + \frac{(p+1)p}{1.2} A_0 = 0,$$

$$\frac{p-1}{1} A_2 + \frac{p(p-1)}{1.2} A_1 + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3} A_0 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$2A_{p-1} + 3A_{p-2} + 4A_{p-3} + \ldots + pA_1 + (p+1)A_0 = 0,$$

$$A_p + A_{p-1} + A_{p-2} + \ldots + A_1 + A_0 = 0;$$

ces équations permettent de calculer $A_0, A_1, \ldots, A_p$, et, par suite, de déterminer le polynôme $B_p(x)$.

Si, dans la relation

$$B_p(x+1) - B_p(x) = x^p,$$

on remplace x successivement par $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, on trouve

$$B_p(1) - B_p(0) \quad = 0,$$

$$B_p(2) - B_p(1) \quad = 1^p,$$

$$B_p(3) - B_p(2) \quad = 2^p,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_p(n) - B_p(n-1) = (n-1)^p,$$

d'où

$$B_p(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + (n-1)^p.$$

nts du polynôme $B_p(x)$ sont donc les mêmes que
nces de n dans le développement de la somme s_p

des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des $n-1$ premiers nombres entiers; par suite,

$$B_p(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2}x^p + pB_1\frac{x^{p-1}}{1.2} - p(p-1)(p-2)B_2\frac{x^{p-3}}{1.2.3.4} + \ldots$$

Ainsi, les nombres de Bernoulli figurent dans l'expression des polynômes $B_p(x)$; c'est pour cette raison que Raabe les appela *polynômes de Bernoulli.*

La relation

$$B_p(1) - B_p(0) = 0$$

montre que tous les polynômes $B_1(x)$, $B_2(x)$, ... s'annulent, non seulement pour $x=0$, mais encore pour $x=1$.

Si l'on change maintenant x en $-x$ dans la relation qui définit $B_p(x)$, elle devient

$$B_p(1-x) - B_p(-x) = (-1)^p x^p.$$

Soit

$$P_p(x) = (-1)^{p+1} B_p(1-x);$$

le polynôme $P_p(x)$ est de degré $p+1$; il s'annule pour $x=0$, car

$$P_p(0) = (-1)^{p+1} B_p(1);$$

et, de plus, il vérifie la relation

$$P_p(x+1) - P_p(x) = x^p.$$

On en conclut que $P_p(x)$ est identique à $B_p(x)$, de sorte que

$$B_p(x) = (-1)^{p+1} B_p(1-x).$$

On déduit immédiatement de cette relation que $B_p(x)$ est une fonction paire ou impaire de $x - \frac{1}{2}$, suivant que p est impair ou pair; en effet, si l'on pose

$$t = x - \frac{1}{2},$$

on a

$$B_p\left(\frac{1}{2} + t\right) = (-1)^{p+1} B_p\left(\frac{1}{2} - t\right).$$

Formule sommatoire d'Euler. — On a vu (p. 116) que la fonction

$$y = \frac{x}{e^x - 1}$$

est développable en série entière pour toutes les valeurs de x comprises dans un certain intervalle; la variable restant à l'intérieur de cet intervalle, on peut donc poser

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots.$$

Il suffit, pour déterminer les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_p, \ldots$, d'effectuer le produit

$$\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right)(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots)$$

et de l'égaler à x; on obtient ainsi les relations suivantes

$$\begin{aligned}
&A_0 = 1,\\
&\frac{A_0}{1.2} + \frac{A_1}{1} = 0,\\
&\frac{A_0}{1.2.3} + \frac{A_1}{1.2} + \frac{A_2}{1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{A_0}{1.2\ldots p} + \frac{A_1}{1.2\ldots(p-1)} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

relations qui permettent de calculer successivement les inconnues $A_0, A_1, \ldots, A_p, \ldots$. D'ailleurs, il est facile de trouver la solution générale de ce système, car (p. 117)

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_1}{1.2}x^2 - \frac{B_2}{1.2.3.4}x^4 + \ldots - (-1)^n \frac{B_n}{1.2\ldots 2n}x^{2n} - \ldots,$$

d'où

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{B_1}{1.2}, \quad A_3 = 0, \quad \ldots,$$

et, à partir de $n = 1$,

$$A_{2n+1} = 0, \quad A_{2n} = -(-1)^n \frac{B_n}{1.2\ldots 2n}.$$

Ces résultats une fois établis, on en déduit très simplement une formule fort importante découverte par Euler.

Soit $f(x)$ une fonction dérivable, ainsi que ses $2n$ premières dérivées, dans un intervalle $(x, x+h)$; si l'on pose, pour abréger,

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x),$$

et, en général,

$$\Delta f^{(p)}(x) = f^{(p)}(x+h) - f^{(p)}(x),$$

on a, d'après la formule de Taylor,

$$\Delta f(x) = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^{2n}}{1.2\ldots 2n} f^{(2n)}(x) + \lambda_1 \frac{h^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)},$$

$$h\Delta f'(x) = \frac{h^2}{1} f''(x) + \ldots + \frac{h^{2n}}{1.2\ldots(2n-1)} f^{(2n)}(x) + \lambda_2 \frac{h^{2n+1}}{1.2\ldots 2n},$$

. . . .

$$h^{2n-1}\Delta f^{(2n-1)}(x) = \frac{h^{2n}}{1} f^{(2n)}(x) + \lambda_{2n} \frac{h^{2n+1}}{1.2},$$

le coefficient λ_p étant défini par l'égalité

$$\lambda_p = f^{(2n+1)}(x + \theta_p h), \qquad 0 < \theta_p < 1.$$

Or, si l'on multiplie ces équations respectivement par

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots, \quad A_{2n-1}, \quad \ldots,$$

et qu'on les ajoute, on constate immédiatement, en se reportant aux relations vérifiées par ces constantes, que les nombres

$$h^2 f''(x), \quad h^3 f'''(x), \quad \ldots, \quad h^{2n} f^{(2n)}(x), \quad \ldots$$

se trouvent éliminés; par suite, en posant

$$R_{2n+1}(x) = -h^{2n+1} \sum_{p=1}^{p=2n} A_{p-1} \frac{f^{(2n+1)}(x+\theta_p h)}{1.2\ldots(2n-p+2)},$$

on a

$$hf'(x) = \Delta f(x) - \frac{h}{2}\Delta f'(x) + \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta f''(x) - \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}\Delta f^{\text{IV}}(x) + \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{B_{n-1} h^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2)} \Delta f^{(2n-2)}(x) + R_{2n+1}(x);$$

c'est la *formule sommatoire d'Euler* [1].

---

[1] *Commentarii Academiæ Scientiarum imperialis petropolitanæ*, t. VI, 1732-1733, p. 69. Cette formule est très souvent attribuée à Mac Laurin.

La démonstration précédente, que nous donnons d'après J. Tannery ([1]), est due à Malmstén ([2]).

L'expression du reste $R_{2n+1}(x)$ peut se mettre sous différentes formes; lorsqu'on parvient à reconnaître que l'une ou l'autre de ces expressions tend vers zéro pour $n=\infty$, la formule d'Euler se transforme en une série; mais cette circonstance ne se présente que très rarement.

Dans le cas où l'on suppose que $f(x)$ est un polynôme de degré inférieur à $2n+1$, le reste disparaît de lui-même; en partant de cette remarque, on retrouve sans peine l'expression générale du polynôme de Bernoulli $B_n(x)$ ([3]).

Nombre e.

Le *nombre e* ([4]) est la somme de la série convergente

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}+\ldots,$$

ou bien encore la limite, pour $n=\infty$, de l'expression

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Le nombre e joue un rôle prépondérant dans la Science; la propriété fondamentale et caractéristique de la fonction exponentielle de ne pas être altérée par la dérivation, lui donne, en effet, une importance véritablement exceptionnelle dans les opérations analytiques.

Si l'on pose

$$1.2\ldots n R_{n+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots,$$

([1]) *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. 352-356.

([2]) *Acta mathematica*, t. V, 1884, p. 1-46.

([3]) *Voir* : J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, [illegible]-360.

([4]) [illegible]est Euler qui a introduit la lettre e pour désigner ce nombre (*Com-* [illegible] *cademiæ Scientiarum imperialis petropolitanæ*, t. IX, 1737, p. 120).

les termes du second membre sont respectivement moindres que ceux de la progression

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots,$$

dont la somme est $\frac{1}{n}$; par suite, on peut mettre le reste R_{n+1} sous la forme

$$R_{n+1}=\frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{\theta}{n},$$

en désignant par θ un nombre positif inférieur à l'unité. Ainsi, pour $n=2$, on trouve

$$e=\frac{5}{2}+\frac{\theta}{4};$$

on a donc

$$2<e<3.$$

Irrationalité du nombre e. — Le nombre e est supérieur à 2 et inférieur à 3; par suite, il n'est pas entier. Il n'est pas non plus fractionnaire. En effet, si on le supposait égal à une fraction irréductible $\frac{a}{b}$, on aurait, en s'arrêtant au terme de rang $m+1$,

$$\frac{a}{b}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots m}+\frac{1}{1.2\ldots m}\,\frac{\theta}{m};$$

or, si l'on prend m supérieur à b, et que l'on multiplie les deux membres de cette égalité par le produit $1.2\ldots m$, on peut la mettre sous la forme

$$A-B=\frac{\theta}{m},$$

les nombres A et B étant des entiers positifs; mais il est inadmissible que le nombre entier et positif $A-B$ soit moindre que l'unité. Le nombre e est donc irrationnel [1]; sa valeur avec vingt

---

[1] La première démonstration de ce résultat est d'Euler (*Commentarii Academiæ Scientiarum imperialis petropolitanæ*, t. IX, 1737, p. 120-121).

décimales exactes est

$$e = 2,718281828459045235 36\ldots \quad (^1).$$

Irrationalité des puissances entières du nombre e. — Soit

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^m}{1.2\ldots m};$$

on en déduit

$$\frac{e^x - y}{x^{m+1}} = \frac{1}{1.2\ldots(m+1)} + \frac{x}{1.2\ldots(m+2)} + \ldots$$
$$+ \frac{x^{m+p}}{1.2\ldots(2m+p+1)} + \ldots.$$

Or, si l'on observe que

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) = (-1)^k \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{x^{m+k+1}},$$

l'application de la formule de Leibniz donne

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{e^x}{x^{m+1}}\right) = \frac{e^x f(x)}{x^{2m+1}},$$

le polynôme $f(x)$ ayant ses coefficients entiers.

D'autre part

$$\frac{y}{x^{m+1}} = \frac{1}{x^{m+1}} + \frac{1}{x^m} + \frac{1}{1.2}\,\frac{1}{x^{m-1}} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots m}\,\frac{1}{x};$$

par suite,

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{y}{x^{m+1}}\right) = \frac{g(x)}{x^{2m+1}},$$

en désignant encore par $g(x)$ un polynôme à coefficients entiers.

Enfin,

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{x^{m+p}}{1.2\ldots(2m+p+1)}\right]$$
$$= \frac{1}{(p+m+1)(p+m+2)\ldots(p+2m+1)}\,\frac{x^p}{1.2\ldots p};$$

---

(1) Le nombre e a été calculé avec 205 décimales par William Shanks dans les *Proceedings of the royal Society of London*, t. VI, 1850-1854, p. 397. Boorman en a donné la valeur dans *The mathematical Magazine*, t. I, 1884, p. 204, avec 346 décimales; ses chiffres concordent avec ceux de Shanks jusqu'à la [illegible] décimale.

mais, pour toute valeur positive de p, on a

$$\frac{1}{(p+m+1)(p+m+2)\ldots(p+2m+1)} < \frac{1}{(m+1)(m+2)\ldots(2m+1)};$$

en supposant x positif, on peut donc poser

$$\frac{d^m}{dx^m}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{x^{m+p}}{1.2\ldots(2m+p+1)} = \frac{\theta e^x}{(m+1)(m+2)\ldots(2m+1)},$$

le nombre θ étant compris entre zéro et l'unité.

Si l'on donne maintenant à x une valeur entière et positive, en admettant que e^x soit égal au quotient $\frac{a}{b}$ de deux entiers a et b, on aurait

$$af(x) - bg(x) = \frac{\theta a x^{2m+1}}{(m+1)(m+2)\ldots(2m+1)}.$$

Comme le second membre est positif et non nul, il en est nécessairement de même du premier; or, le coefficient de θ peut être considéré comme le $m^{\text{ième}}$ terme d'une série convergente; il résulterait alors de la relation précédente qu'en prenant m assez grand, son premier membre, qui est un entier non nul, serait arbitrairement petit, conclusion inacceptable; donc e^x est irrationnel, quel que soit l'entier positif x.

Cette belle démonstration est due à Hermite ([1]).

Transcendance du nombre *e*. — On établit la transcendance du nombre e en démontrant qu'il n'est pas susceptible d'être racine d'une équation telle que

$$A_0 e^m + A_1 e^{m-1} + \ldots + A_{m-1} e + A_m = 0,$$

les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m$ étant des entiers dont le dernier n'est pas nul et peut, d'ailleurs, toujours être supposé positif.

([1]) *Faculté des Sciences de Paris. — Cours de M. Hermite rédigé en* 1882 *par M. Andoyer*, 4e édit., p. 73-74. L'irrationalité de e^x a été démontrée au XVIIIe siècle par Lambert au moyen des fractions continues dans les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres* [*de Berlin*], 1761, p. 314-315.

Soit

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}(1-x)^p(2-x)^p\ldots(m-x)^p,$$

en désignant par p un nombre premier et supérieur aux entiers A_m et m. Si r est le degré de $f(x)$, le polynôme

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(r-1)}(x) + f^{(r)}(x)$$

est lui-même de degré r, et satisfait à la relation

$$F(x) - F'(x) = f(x);$$

alors, l'application de la formule des accroissements finis à la fonction $e^{-x}F(x)$, dans l'intervalle $(0, x)$, donne

$$e^{-x}F(x) - F(0) = -xe^{-\theta x}f(\theta x),$$

et, par suite,

$$F(x) - e^x F(0) = -xe^{(1-\theta)x}f(\theta x),$$

d'où, pour une valeur entière n de x,

$$e^n F(0) = F(n) + \lambda_n,$$

en posant

$$\lambda_n = ne^{n(1-\theta)}f(n\theta).$$

Soient a et A les maximums respectifs des valeurs absolues des produits $(1-x)(2-x)\ldots(m-x)$ et $x(1-x)(2-x)\ldots(m-x)$, quand x varie de 0 à m; on a, n étant une valeur entière de la variable dans l'intervalle $(0, m)$,

$$|ne^{n(1-\theta)}f(n\theta)| < nae^n\frac{A^{p-1}}{1.2\ldots p-1};$$

lorsque p devient infini, le produit nae^n reste constant, tandis que l'expression $\frac{A^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}$, considérée comme terme général d'une série convergente, tend vers zéro; σ_n désignant un nombre positif arbitrairement petit, on peut donc déterminer un entier p_n tel que, à partir de $p = p_n$, on ait

$$|\lambda_n| < \sigma_n.$$

Or, si l'équation

$$A_0e^m + A_1e^{m-1} + \ldots + A_{m-1}e + A_m = 0$$

est supposée vérifiée, on en déduit, après avoir multiplié par $F(0)$,

$$A_0 F(m) + A_1 F(m-1) + \ldots + A_m F(0) \\ = -(A_0 \lambda_m + A_1 \lambda_{m-1} + \ldots + A_{m-1}\lambda_1);$$

mais on peut prendre p suffisamment grand pour que, σ étant positif et arbitrairement petit, on ait simultanément

$$\lambda_m < \frac{\sigma}{m}\frac{1}{|A_0|}, \qquad \lambda_{m-1} < \frac{\sigma}{m}\frac{1}{|A_1|}, \qquad \ldots, \qquad \lambda_1 < \frac{\sigma}{m}\frac{1}{|A_{m-1}|},$$

il en résulte

$$|A_0 F(m) + A_1 F(m-1) + \ldots + A_m F(0)| < \sigma.$$

Une telle inégalité est impossible.

En effet,

$$F(n) = f(n) + f'(n) + \ldots + f^{(r)}(n),$$

et, l'entier n étant au plus égal à m, soit

$$\varphi(x) = x^{p-1}(1-x)^p \ldots (n-1-x)^p (n+1-x)^p \ldots (m-x)^p;$$

l'expression du polynôme $f(x)$ devient

$$f(x) = \frac{(n-x)^p}{1.2\ldots(p-1)}\varphi(x);$$

si l'on applique la formule de Leibniz, on trouve alors

$$1.2\ldots(p-1) f^{(k)}(x) = [(n-x)^p]^{(k)}\varphi(x) + \frac{k}{1}[(n-x)^p]^{(k-1)}\varphi'(x) \\ + \frac{k(k-1)}{1.2}[(n-x)^p]^{(k-2)}\varphi''(x) + \ldots + (n-x)^p \varphi^{(k)}(x);$$

pour $x = n$, les $p-1$ premières dérivées de $f(x)$, toutes divisibles par $n-x$, s'annulent, et, quant à une dérivée d'ordre $p+q$ de $f(x)$, elle se réduit à

$$f^{(p+q)}(n) = (-1)^p p \frac{(p+q)(p+q-1)\ldots(p+1)}{1.2\ldots q}\varphi^{(q)}(n);$$

comme le coefficient binomial qui y figure est un entier et que $\varphi(x)$ est un polynôme à coefficients entiers, le résultat est un entier nul ou non nul divisible par p, et il en est de même de $F(n)$ dont tous les termes jouissent de cette propriété.

D'autre part,

$$F(o) = f(o) + f'(o) + \ldots + f^{(r)}(o),$$

et, si l'on pose

$$\psi(x) = [(1-x)(2-x)\ldots(m-x)]^p,$$

on peut mettre $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}\psi(x);$$

en prenant la dérivée $k^{\text{ième}}$, on obtient

$$1.2\ldots(p-1)f^{(k)}(x) = [x^{p-1}]^{(k)}\psi(x) + \frac{k}{1}[x^{p-1}]^{(k-1)}\psi'(x)$$
$$+ \frac{k(k-1)}{1.2}[x^{p-1}]^{(k-2)}\psi''(x) + \ldots + x^{p-1}\psi^{(k)}(x);$$

pour $x = o$, les $p-2$ premières dérivées de $f(x)$, toutes divisibles par x, s'annulent; quant à la $(p-1)^{\text{ième}}$, elle est égale à

$$f^{(p-1)}(o) = \psi(o) = [1.2\ldots m]^p,$$

nombre entier qui n'est ni nul ni divisible par p, car p est premier et supérieur à m; enfin, une dérivée d'ordre $p-1+q$ se réduit, pour $x = o$, à

$$f^{(p-1+q)}(o) = \frac{p(p+1)\ldots(p+q-1)}{1.2\ldots q}[\psi(x)]_0^{(q)},$$

nombre entier qui est nul ou non nul divisible par p, puisque $\psi(x)$ a ses coefficients entiers. Donc, en définitive, $F(o)$ n'est ni nul ni divisible par p.

Ainsi, le premier membre de l'inégalité

$$|A_0 F(m) + A_1 F(m-1) + \ldots + A_m F(o)| < \varepsilon,$$

les réductions une fois faites, est un entier non nul. En effet, d'une part, $F(1)$, $F(2)$, ..., $F(m)$ sont des entiers ou nuls ou non nuls divisibles par p, et, d'autre part, $A_m F(o)$ est un entier ni nul ni divisible par p, puisque le nombre premier p est supérieur à l'entier A_m non nul par hypothèse, et que $F(o)$ n'est ni nul ni divisible par p; comme il est inadmissible qu'un entier déterminé non nul soit arbitrairement petit, on ne peut supposer que le nombre e est algébrique : il est donc transcendant.

C'est Hermite qui le premier a établi la transcendance du nombre e (1); la démonstration précédente, entièrement différente de celle de Hermite, est due à Hurwitz (2) et à Gordan (3), mais son principe se trouve déjà dans les travaux antérieurs de Stieltjes et de Hilbert sur le même sujet.

FONCTION a^x.

Soient a une constante positive et x une variable; le symbole a^x représente :

1° Le produit de x facteurs égaux à a, si x est entier positif;

2° Le radical $\sqrt[q]{a^p}$, si x est le quotient $\frac{p}{q}$ de deux entiers positifs p et q;

3° La limite de la variante a^{x_n}, si x est irrationnel positif, en désignant par x_n une variante rationnelle positive ayant x pour limite (p. 14);

4° Le rapport $\frac{1}{a^n}$, si x est négatif et égal à $-n$.

Ainsi, quelle que soit la nature du nombre x, le symbole a^x a une signification précise.

L'équation

$$e^x - a = 0$$

n'a qu'une seule racine réelle, positive si a est supérieur à l'unité, négative si a est inférieur à l'unité. En effet, lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction e^x varie de 0 à $+\infty$, et, comme elle est continue, elle passe par toutes les valeurs intermédiaires (p. 19), et, en particulier, par la valeur a; de plus, elle n'y passe qu'une

---

(1) *Sur la fonction exponentielle* (*Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVII, 1873). Cette découverte de Hermite qui, d'après Painlevé, surpasse toutes les autres, « apparaît comme un roc isolé et splendide dans le domaine presque inexploré des incommensurables ». (APPELL).

(2) *Démonstration de la transcendance du nombre e* (*Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXVI, 1893, p. 788-789).

(3) *Mathematische Annalen*, t. XLIII, 1893, p. 222-224.

tive, puisqu'elle est constamment croissante; m étant cette racine, on a

$$a = e^m,$$

de sorte que

$$a^x = e^{mx}.$$

La fonction a^x se trouve ainsi ramenée à la fonction exponentielle; elle possède, par suite, les mêmes propriétés. Elle est donc positive, continue, croissante et dérivable pour toute valeur de la variable; en outre, elle est caractérisée par la relation

$$a^x a^y = a^{x+y};$$

en effet, toute fonction continue $f(x)$ vérifiant une relation telle que

$$f(x)f(y) = f(x+y),$$

est nécessairement de la forme a^x; car, de cette relation on déduit sans peine, par un procédé dont on a déjà fait usage (p. [illegible]), que, pour toute valeur de x et de n, on a

$$f(nx) = f^x(n),$$

d'où, pour $n = 1$, en désignant par a la constante positive $f(1)$,

$$f(x) = a^x.$$

Il y a lieu d'observer que par là même se trouve établie la formule

$$(a^x)^y = a^{xy},$$

dont la démonstration directe est d'ailleurs facile.

Application. Démonstration générale de la formule du binôme. — Soient

$$a_p = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}, \qquad b_p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p};$$

les deux séries

$$f(m) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + \ldots,$$
$$f(n) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p x^p + \ldots$$

sont absolument convergentes pour toutes les valeurs de x inté-

rieures à l'intervalle $(-1, +1)$; leur produit est de la forme

$$f(m)f(n) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_p x^p + \ldots;$$

d'ailleurs

$$c_p = a_p + a_{p-1} b_1 + a_{p-2} b_2 + \ldots + b_p.$$

D'autre part,

$$(p-q) a_{p-q} = (m-p+q+1) a_{p-q-1}, \qquad q b_q = (n-q+1) b_{q-1};$$

si l'on ajoute ces relations après avoir multiplié la première par b_q et la seconde par a_{p-q}, on trouve

$$p a_{p-q} b_q = (m-p+q+1) a_{p-q-1} b_q + (n-q+1) a_{p-q} b_{q-1},$$

et, en donnant à q les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p$, on obtient successivement

$$\begin{aligned} p a_p &= (m-p+1) a_{p-1}, \\ p a_{p-1} b_1 &= (m-p+2) a_{p-2} b_1 + n a_{p-1}, \\ p a_{p-2} b_2 &= (m-p+3) a_{p-3} b_2 + (n-1) a_{p-2} b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p b_p &= (n-p+1) b_{p-1}, \end{aligned}$$

d'où, par addition,

$$p c_p = (m+n-p+1) c_{p-1};$$

or, c_1 est égal à $m+n$, on peut donc poser

$$\begin{aligned} 1 c_1 &= (m+n), \\ 2 c_2 &= (m+n-1) c_1, \\ 3 c_3 &= (m+n-2) c_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p c_p &= (m+n-p+1) c_{p-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$c_p = \frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-p+1)}{1.2\ldots p};$$

ce coefficient est celui de x^p dans $f(m+n)$, par conséquent

$$f(m)f(n) = f(m+n).$$

La série $f(m)$ est une fonction continue de m pour toute valeur de x intérieure à l'intervalle $(-1, +1)$, car, x ayant une valeur déterminée comprise entre -1 et $+1$, elle est uniformément

convergente par rapport à m. En effet, soit M un nombre positif arbitrairement grand; quel que soit m à l'intérieur de l'intervalle $(-M, +M)$, les valeurs absolues des termes de la série $f(m)$ sont inférieures aux termes correspondants de la série positive convergente de terme général

$$\frac{M(M+1)\dots(M+p-1)}{1.2\dots p}|x^p|.$$

Il résulte alors de la relation précédente que $f(m)$ est de la forme

$$f(m)=a^m,$$

en désignant par a une constante positive; pour $m=1$, on trouve

$$a=1+x,$$

par suite, pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$ et pour toute valeur rationnelle ou irrationnelle de m, on a

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p}x^p+\dots.$$

Cette démonstration absolument générale, puisqu'elle s'applique même au cas où l'exposant est irrationnel, est due en principe à Euler ([1]); elle a été signalée par Cauchy ([2]) et développée par Abel ([3]) dans son célèbre Mémoire sur la série binomiale.

Logarithmes.

Soit a une constante positive; on nomme *logarithme* d'un nombre positif x, *dans le système de base* a, le nombre y tel que l'on ait

$$x=a^y;$$

([1]) *Novi Commentarii Academiæ Scientiarum imperialis petropolitanæ*, t. XIX, 1774, p. 103-111.

([2]) *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique* (*Œuvres complètes*, 2ᵉ série, t. III, p. 141-142 et p. 146-147).

([3]) *Recherches sur la série* $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\dots$ (*Œuvres complètes*, éd. L. Sylow et S. Lie, t. I, p. 219-250).

ce nombre y se représente par le symbole $\log_a x$, qui s'énonce *logarithme indice a de x*; on a, par suite, identiquement

$$x = a^{\log_a x}.$$

Tout nombre positif a un logarithme et n'en a qu'un seul. En effet, si m est l'unique racine réelle de l'équation

$$e^x - a = 0,$$

on a

$$x = e^{my},$$

et cette équation n'admet aussi qu'une seule racine réelle, puisqu'elle est de même forme que la précédente. Si la base est supérieure à l'unité, le logarithme est positif ou négatif suivant que le nombre est plus grand ou plus petit que un; le contraire a lieu si la base est inférieure à l'unité.

On déduit immédiatement de ce qui précède les résultats suivants :

$$a > 1,\quad \log_a 0 = -\infty,\quad \log_a 1 = 0,\quad \log_a a = 1,\quad \log_a +\infty = +\infty,$$
$$a < 1,\quad \log_a 0 = +\infty,\quad \log_a a = 1,\quad \log_a 1 = 0,\quad \log_a +\infty = -\infty.$$

On doit l'invention des logarithmes à Joost Bürgi (¹) et à John [illegible]apier, baron de Merchiston, plus connu sous le nom de [illegible]er (²). L'un et l'autre se partagent la gloire de les avoir intro- [illegible] dans la Science; mais, si au premier est acquis le mérite de [illegible]ouverte de cet admirable instrument de calcul, au second [illegible] l'honneur d'en avoir compris la puissance et répandu [illegible](³).

[illegible]ürgi choisit pour base le nombre e, tandis que Neper adopta son inverse $\frac{1}{e}$.

(¹) Les Tables de logarithmes de Bürgi, composées entre 1603 et 1611, furent publiées à Prague, en 1620, sous le titre de *Arithmetische und geometrische Progress Tabulen*.

(²) Neper a exposé ses recherches dans deux Ouvrages : l'un parut à Édimbourg en 1614; il est intitulé : *Mirifici logarithmorum canonis descriptio;* l'autre, composé avant 1614, fut édité, deux ans après la mort de l'auteur, par son fils Robert et par Henry Briggs.

(³) *Voir* pour l'histoire de la découverte des logarithmes : MORITZ CANTOR *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2ᵉ éd., t. II, p. 718-748.

Propriétés des logarithmes. — 1° **Logarithme d'un produit.** — *Le logarithme du produit d'un nombre fini de facteurs positifs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs.*

En effet, soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres positifs, et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ leurs logarithmes; on a

$$x_1 = a^{y_1}, \qquad x_2 = a^{y_2}, \qquad \ldots, \qquad x_n = a^{y_n},$$

d'où

$$x_1 x_2 \ldots x_n = a^{y_1 + y_2 + \ldots + y_n},$$

c'est-à-dire

$$\log_a(x_1 x_2 \ldots x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n.$$

2° **Logarithme d'un quotient.** — *Le logarithme du quotient de deux nombres positifs est égal à la différence des logarithmes du dividende et du diviseur.*

En effet, soient x_1, x_2 deux nombres positifs, et y_1, y_2 leurs logarithmes; on a

$$x_1 = a^{y_1}, \qquad x_2 = a^{y_2},$$

d'où

$$\frac{x_1}{x_2} = a^{y_1 - y_2},$$

c'est-à-dire

$$\log \frac{x_1}{x_2} = \log x_1 - \log x_2.$$

3° **Logarithme d'une puissance.** — *Le logarithme de la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un nombre positif est égal à m fois le logarithme de ce nombre.*

En effet, soient x un nombre positif, et y son logarithme; on a

$$x = a^y,$$

d'où, quel que soit m (p. 132),

$$x^m = a^{my},$$

c'est-à-dire

$$\log_a x^m = m \log_a x;$$

en particulier, pour $m = \frac{p}{q}$, on obtient

$$\log_a \sqrt[q]{x^p} = \frac{p}{q} \log_a x.$$

Logarithmes népériens. — On appelle *logarithmes népériens*, ou *logarithmes naturels,* ou encore *logarithmes hyperboliques,* les logarithmes pris dans le système de base e. Ces logarithmes sont les seuls dont on se serve en Analyse; on les représente simplement par le symbole *log*.

Logarithmes vulgaires. — Les *logarithmes vulgaires* sont les logarithmes dont la base est 10; cette base, adoptée pour la première fois par Briggs ([1]), présente l'avantage de rendre les logarithmes des puissances de 10 égaux aux exposants; c'est pour cette raison que les logarithmes vulgaires sont exclusivement employés dans les calculs numériques. Nous les désignerons par la caractéristique *Log;* mais on emploie ordinairement la notation *log* lorsque toute confusion est impossible.

Transformation des logarithmes. — Soit y le logarithme d'un nombre positif x dans un système de base a; on a

$$x = a^y,$$

d'où

$$\log x = y \log a,$$

par suite

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

De même, dans un système de base b,

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}.$$

En posant

$$\mathrm{M} = \frac{\log a}{\log b},$$

on déduit des égalités précédentes

$$\log_b x = \mathrm{M} \log_a x;$$

cette relation permet de passer du système de base a au système de base b et inversement. La constante M est le *module* du système de base b relatif au système de base a.

([1]) Les tables décimales de Briggs, intitulées *Arithmetica logarithmica*, parurent en 1624; mais, dès 1617, Briggs avait donné une *Logarithmorum Chilias prima*, calculée en prenant 10 pour base.

Si l'on considère un autre nombre y, on a

$$\log_b y = \mathrm{M} \log_a y,$$

d'où

$$\frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y};$$

le rapport des logarithmes de deux nombres est donc indépendant de la base; en particulier, pour $x = a$ et $y = b$, on trouve la relation curieuse

$$\log_a b \log_b a = 1.$$

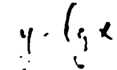
Fonction $\log x$. — La fonction $\log x$ est la fonction y définie par la relation

$$x = e^y,$$

où l'on suppose la variable x toujours positive. La fonction $\log x$ est donc l'inverse de la fonction exponentielle; elle est uniforme, car tout nombre positif n'a qu'un logarithme.

Dérivée de $\log x$. — Si l'on applique la formule des accroissements finis à la fonction

$$x = e^y,$$



on trouve

$$\Delta x = e^{y+\theta\Delta y}\Delta y;$$

le coefficient de Δy n'est jamais ni nul ni infini si l'on suppose x différent de zéro et fini; quand Δx tend vers zéro, il en est donc nécessairement de même de Δy; d'autre part, la fonction e^y est continue, par suite

$$y' = \frac{1}{e^y},$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Limite de l'expression $n(\sqrt[n]{x} - 1)$ pour $n = \infty$. — Le nombre x étant supposé positif, soit

$$y = \log x;$$

on a, quel que soit n, l'identité

$$x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{y}{n}},$$

d'où l'on déduit

$$\sqrt[n]{x} = 1 + \frac{1}{n}\frac{y}{1} + \frac{1}{n^2}\frac{y^2}{1.2} + \frac{1}{n^3}\frac{y^3}{1.2.3} + \ldots,$$

et, par suite,

$$n(\sqrt[n]{x} - 1) = \frac{y}{1} + \frac{1}{n}\frac{y^2}{1.2} + \frac{1}{n^2}\frac{y^3}{1.2.3} + \ldots;$$

quand n devient infini, le second membre de cette égalité tendant vers y, il en est de même du premier. Ainsi $\log x$ est la limite, pour $n = \infty$, de l'expression

$$n(\sqrt[n]{x} - 1).$$

Cette propriété de la fonction $\log x$, que l'on pourrait prendre comme définition, correspond à la propriété de l'exponentielle e^x d'être la limite, pour $n = \infty$, du binôme

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Développement de $\log(1+x)$ **en série entière.** — La dérivée de $\log(1+x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},$$

peut se développer suivant la série entière

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \ldots, \qquad -1 < x < 1;$$

comme $f(0)$ est nul, on a donc (p. 95)

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - (-1)^n\frac{x^n}{n} - \ldots, \qquad -1 < x \leqq 1;$$

cette série, qui vraisemblablement doit être attribuée à Mercator ([1]), est convergente pour $x = 1$, mais elle ne l'est pas pour $x = -1$; d'après le théorème d'Abel, la limite de $\log(1+x)$

([1]) *Logarithmotechnia*..., Londini, 1668. En cette même année 1668, James Gregory publia ses *Exercitationes geometricae*, Ouvrage qui renferme, outre la série de Mercator, le développement de $\log\frac{1+x}{1-x}$.

pour $x = 1$, est égale à la somme de la série pour $x = 1$, par suite,

$$\log 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots;$$

ainsi la somme de la série harmonique alternée est égale à $\log 2$.

Calcul des logarithmes. — Soit x un nombre positif inférieur à l'unité; on a

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

$$\log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

d'où

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right);$$

si l'on pose

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+h}{n},$$

le développement précédent devient

$$\log(n+h) = \log n + 2\left[\frac{h}{2n+h} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{(2n+h)^3} + \frac{1}{5}\frac{h^5}{(2n+h)^5} + \ldots\right];$$

cette série, d'autant plus convergente que n est plus grand, permet de calculer successivement les logarithmes népériens des nombres. Ainsi, pour $n = 1$ et $h = 1$, on obtient

$$\log 2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{2}{3^3} + \frac{1}{5}\frac{2}{3^5} + \frac{1}{7}\frac{2}{3^7} + \ldots;$$

on réduit d'abord en décimales les fractions $\frac{2}{3}, \frac{2}{3^3}, \frac{2}{3^5}, \frac{2}{3^7}, \ldots$, chaque quotient se déduisant du précédent au moyen d'une division par 9; les dix premiers termes donnent

$$\log 2 = 0,6931471806\ldots.$$

Pour $n = 5^3$ et $h = 3$, on a

$$\log 128 = 3\log 5 + 2\left(\frac{3}{253} + \frac{1}{3}\frac{3^3}{253^3} + \ldots\right);$$

or, $128 = 2^7$; par suite,

$$\log 5 = \frac{7}{3}\log 2 - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{253} + \frac{1}{3}\frac{3^3}{253^3} + \ldots\right).$$

d'où, avec dix décimales exactes,

$$\log 5 = 1{,}6094379124\ldots.$$

Pour $n = 5.2^4$ et $h = 1$, on trouve

$$\log 81 = 4\log 2 + \log 5 + 2\left(\frac{1}{161} + \frac{1}{3}\frac{1}{161^3} + \ldots\right);$$

mais $81 = 3^4$, de la relation précédente on tire alors

$$\log 3 = \log 2 + \frac{1}{4}\log 5 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{161} + \frac{1}{3}\frac{1}{161^3} + \ldots\right).$$

Le logarithme de 4 est égal au double de celui de 2; pour avoir log 6, il suffit d'ajouter log 2 et log 3; et ainsi de suite.

Le calcul des logarithmes vulgaires nécessite d'abord la recherche du module. Ce nombre est l'inverse de log 10; or

$$\log 10 = \log 2 + \log 5,$$

par suite

$$M = 0{,}4342944819\ldots.$$

Si l'on considère maintenant le développement

$$\mathrm{Log}(n+h) = \mathrm{Log}\,n + 2M\left[\frac{h}{2n+h} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{(2n+h)^3} + \ldots\right],$$

pour $n = 10^3$ et $h = 24$, on a

$$\mathrm{Log}\,1024 = 3 + 2M\left[\frac{24}{2024} + \frac{1}{3}\frac{24^3}{2024^3} + \ldots\right];$$

mais $1024 = 2^{10}$, par suite

$$\mathrm{Log}\,2 = 0{,}3 + \frac{2M}{10}\left[\frac{24}{2024} + \frac{1}{3}\frac{24^3}{2024^3} + \ldots\right].$$

On calcule Log 3 en faisant $n = 2^{16}$ et $h = 74$; on obtient ainsi

$$\mathrm{Log}\,65610 = 16\,\mathrm{Log}\,2 + 2M\left[\frac{74}{131146} + \ldots\right],$$

et, comme $65610 = 10.3^8$, la relation précédente donne

$$\mathrm{Log}\,3 = 2\,\mathrm{Log}\,2 - \frac{1}{8} + \frac{M}{4}\left[\frac{74}{131146} + \ldots\right].$$

Le logarithme de 4 est égal au double de Log 2; et ainsi de suite.

Les opérations deviennent d'autant plus simples que n est plus élevé; ainsi, pour $n = 100$ et $h = 1$, la formule

$$\text{Log}\,101 = 2 + \frac{2M}{201} + \frac{1}{3}\frac{2M}{201^3}$$

suffit pour obtenir Log 101 avec dix décimales exactes; à partir de 1000, on peut se borner aux deux premiers termes seulement.

Les logarithmes des nombres entiers successifs étant calculés jusqu'à un entier déterminé, il reste à voir comment la table ainsi formée permet d'obtenir les logarithmes des nombres qui n'y figurent pas. Soit donc x un nombre positif dont la partie entière x_0 se trouve dans la table; si l'on pose

$$x = x_0 + h,$$

en désignant par y, y_0 et y_1 les logarithmes respectifs de x, x_0 et $x_0 + 1$, on calcule y au moyen de la relation approchée

$$y = y_0 + h(y_1 - y_0).$$

Or, d'après la formule des accroissements finis,

$$y - y_0 = M\frac{h}{x_0 + \theta_0 h}, \qquad 0 < \theta_0 < 1,$$

$$y_1 - y_0 = M\frac{1}{x_0 + \theta_1}, \qquad 0 < \theta_1 < 1;$$

par suite, la valeur approchée de y peut se mettre sous la forme

$$y_0 + M\frac{h}{x_0 + \theta_1},$$

tandis que la valeur exacte a pour expression

$$y_0 + M\frac{h}{x_0 + \theta_0 h};$$

l'erreur commise est, en conséquence,

$$Mh\left(\frac{1}{x_0 + \theta_0 h} - \frac{1}{x_0 + \theta_1}\right);$$

elle est moindre en valeur absolue que

$$\mathrm{M}h\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0+1}\right),$$

et, à plus forte raison, plus petite que

$$\frac{\mathrm{M}}{x_0(x_0+1)},$$

puisque h est inférieur à l'unité. Dans le cas des logarithmes vulgaires $\mathrm{M}=0,4342\ldots$, et, pour $x_0>10000$, l'erreur est moindre que $\frac{44}{10^{10}}$; par suite, elle ne dépasse jamais une demi-unité du huitième ordre décimal.

Constante d'Euler. — Soit

$$\rho_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n;$$

on a

$$\log n=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\ldots+\log\frac{n}{n-1},$$

par suite

$$\rho_n=\left(\frac{1}{1}-\log\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\log\frac{3}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right)+\log\frac{n+1}{n};$$

le dernier terme de cette somme tend vers zéro; d'autre part, si l'on pose

$$u_n=\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n},$$

comme

$$\log(n+1)-\log n=\frac{1}{n+\theta},\qquad 0<\theta<1,$$

on en déduit

$$u_n<\frac{1}{n^2};$$

la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente, il en est donc de même de la série positive de terme général u_n; de là résulte que ρ_n a nécessairement une limite ρ. Cette limite est connue sous le

nom de *constante d'Euler* (¹). Elle joue dans la théorie de la fonction gamma un rôle analogue à celui du nombre π dans la théorie des fonctions circulaires (²).

Les termes de la série positive

$$\gamma = \left(\frac{1}{1} - \log\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \log\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \log\frac{4}{3}\right) + \ldots$$

sont développables suivant les séries convergentes

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{1} - \log\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots, \\
\frac{1}{2} - \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{2^4} - \ldots, \\
\frac{1}{3} - \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{3^4} - \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{n^4} - \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{array}$$

ces développements, sauf le premier, sont absolument convergents. D'ailleurs, la série positive de terme général

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{n^4} + \ldots$$

est convergente, car, d'après la formule des accroissements finis, on a

$$-\frac{1}{n} - \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n-\theta} - \frac{1}{n}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

égalité dont le second membre est inférieur à

$$\frac{1}{n \cdot n - 1}.$$

Si donc on pose

$$S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots,$$

(¹) *Commentarii Academiæ Scientiarum imperialis petropolitanæ*, t. VII, 1734-1735, p. 156-157.

(²) On peut consulter, pour l'histoire de ce nombre célèbre, la Monographie publiée par Glaisher dans *The Messenger of Mathematics*, t. I, 1872, p. 25-30 et II, 1873, p. 64.

en appliquant le théorème des séries de séries (p. 48) aux termes de la série ρ, on trouve

$$\rho = \frac{S_2}{2} - \frac{S_3}{3} + \frac{S_4}{4} - \ldots,$$

formule découverte par Euler [1].

Les sommes S_2, S_3, S_4, ..., qui se présentent en Analyse dans d'importantes questions, ont été calculées par Euler [2] jusqu'à S_{16} avec seize décimales, puis par Legendre [3] jusqu'à S_{35} avec seize décimales également, et enfin par Stieltjes [4] jusqu'à S_{70} avec trente-deux décimales. Ces constantes une fois déterminées, le développement précédent, bien qu'il converge lentement, peut servir à évaluer le nombre ρ; Euler a trouvé de cette manière sa valeur avec cinq décimales exactes. Mais, il existe des procédés beaucoup plus avantageux, donnant rapidement une grande approximation. C'est ainsi que Shanks [5] a obtenu la constante d'Euler avec 59 décimales exactes; si l'on se borne à vingt décimales, on a

$$\rho = 0,577\,215\,664\,901\,532\,860\,60\ldots \quad = \sim \frac{10}{17}$$

Cesàro T. II § 52

Application. Formule de Cesàro. — Soit s_n la somme des n premiers termes de la série harmonique; si l'on considère le développement

$$\frac{1}{2}\log\frac{n+1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{n^5} + \ldots,$$

$\frac{\rho}{\pi} = 0.1837334\ldots$

$\frac{\pi}{\rho} = 5.4426\ldots$

et, si l'on pose

$$u_{n-1} = \frac{1}{2}\log\frac{n+1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

d'où

$$u_{n-2} = \frac{1}{2}\log\frac{n}{n-2} - \frac{1}{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_1 = \frac{1}{2}\log\frac{3}{1} - \frac{1}{2},$$

[1] *Commentarii Academiae Scientiarum imperialis petropolitanae*, t. VII, 1734-1735, p. 156-157.

[2] *Institutiones Calculi differentialis*, partie 2, § 151.

[3] *Exercices de Calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures*, t. II, p. 65.

[4] *Acta mathematica*, t. X, 1887, p. 300-302.

[5] *Proceedings of the royal Society of London*, 1869-70, t. XVIII, p. 49.

on voit que la somme S_{n-1} des $n-1$ premiers termes de la série de terme général u_n a pour expression

$$S_{n-1} = \frac{1}{2}\log\frac{n(n+1)}{2} - s_n + 1;$$

la limite S de S_n, pour $n = \infty$, est donc

$$S = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \rho + 1,$$

par suite

$$S - S_{n-1} = s_n - \rho - \log\sqrt{n(n+1)}.$$

D'autre part, on a

$$u_{n-1} < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5} + \ldots\right),$$

c'est-à-dire

$$u_{n-1} < \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1}\right);$$

on constate facilement que la somme des $n-1$ premiers termes de la série positive dont le terme général est le second membre de cette inégalité a pour expression

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{6n(n+1)};$$

le reste

$$\frac{1}{6n(n+1)}$$

étant nécessairement supérieur au reste correspondant $S - S_{n-1}$ de la série de terme général u_n, il en résulte

$$0 < S - S_{n-1} < \frac{1}{6n(n+1)},$$

et l'on peut poser, θ étant un nombre compris entre 0 et 1,

$$s_n = \rho + \log\sqrt{n(n+1)} - \frac{\theta}{6n(n+1)}.$$

Cette formule, due à Cesàro (¹), permet de calculer, d'une manière très approchée, la somme s_n des n premiers termes de la série harmonique.

(¹) *Mathesis*, t. I, 1881, p. 143-144.

EXERCICES.

1° Quelle est la somme de la série

$$\frac{x}{e^{x}+1}+\frac{2x}{e^{2x}+1}+\frac{4x}{e^{4x}+1}+\ldots?$$

GOMES TEIXEIRA.

2° Soit

$$y = \mathrm{A}e^{ax}+\mathrm{B}e^{bx}+\ldots+\mathrm{L}e^{lx};$$

éliminer par dérivation les constantes A, B, ..., L.

HERMITE.

3° La série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}[n^2x^2e^{-n^2x^2}-(n+1)^2x^2e^{-(n+1)^2x^2}]$$

est-elle uniformément convergente dans l'intervalle (0, 1)? Montrer que cette série est dérivable pour toute valeur de x.

DARBOUX.

4° Établir la relation

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\frac{m}{2}}\mathrm{J}_m(\sqrt{x})\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{\frac{m-n}{2}}\mathrm{J}_{m-n}(\sqrt{x}).$$

TODHUNTER.

5° Démontrer que tout polynôme $\mathrm{P}(x)$, de degré $p+1$, peut être mis sous la forme

$$\mathrm{P}(x)=\lambda_0+\lambda_1\mathrm{B}_0(x)+\lambda_2\mathrm{B}_1(x)+\ldots+\lambda_{p+1}\mathrm{B}_p(x),$$

en désignant par $\mathrm{B}_0(x)$, $\mathrm{B}_1(x)$, ..., $\mathrm{B}_p(x)$ les polynômes de Bernoulli et par λ_0, λ_1, λ_2, ..., λ_{p+1} des constantes. Calculer ces constantes.

En particulier,

$$x^{p+1}=\mathrm{B}_0(x)+\frac{p+1}{1}\mathrm{B}_1(x)+\frac{(p+1)p}{1.2}\mathrm{B}_2(x)$$
$$+\frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\mathrm{B}_3(x)+\ldots+\frac{p+1}{1}\mathrm{B}_p(x).$$

APPELL.

6° Étudier la série de terme général

$$(2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})\ldots(2-\sqrt[n]{e}).$$

E. CAHEN.

7° Calculer les limites, pour $n = \infty$, des expressions

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{1.2.3\ldots n},$$

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n}.$$

LAISANT.

8° Déterminer la limite de l'expression $e^{\frac{x}{y}}$, où x est le nombre de chiffres de y supposé entier, quand y croît indéfiniment.

Examens oraux de l'École polytechnique.

9° Démontrer que $\log x$ ne peut être égal à une fonction rationnelle de x.

LIOUVILLE.

10° Étudier la série

$$\frac{1}{(\log 2)^p} + \frac{1}{(\log 3)^p} + \ldots + \frac{1}{(\log n)^p} + \ldots.$$

BIBLIOGRAPHIE.

AUBRY (A.), Théorie de la fonction logarithmique (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1898-1899 et 1899-1900).

CHRYSTAL (G.), Algebra, t. II, 2e éd. London, Black, 1900, in-8°, p. 221-253.

GRAY (Andrew) and MATHEWS (G. B.), A treatise on Bessel functions and their applications to physics. London, Macmillan, 1895, in-8°.

SAALSCHÜTZ (Louis), Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen. Berlin, Springer, 1893, in-8°.

V.

FONCTIONS CIRCULAIRES.

On donne le nom de *fonctions circulaires* à des fonctions transcendantes que l'on représente par les symboles

$$\cos x, \quad \sin x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \cot x, \quad \operatorname{séc} x, \quad \operatorname{coséc} x,$$

symboles qui s'énoncent : *cosinus* x, *sinus* x, *tangente* x, *cotangente* x, *sécante* x, *cosécante* x ; la variable x s'appelle l'*arc* ou l'*angle* x. Les deux premières de ces fonctions peuvent se définir par des séries entières ; les autres s'expriment en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$ au moyen des relations

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\operatorname{séc} x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{coséc} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Nous étudierons surtout les fonctions $\cos x$ et $\sin x$.

Définition de $\cos x$ et de $\sin x$. — On désigne par $\cos x$ et $\sin x$ les sommes des séries entières

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} + \ldots,$$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} + \ldots,$$

dont le rayon de convergence est infini. Ces séries ont été considérées pour la première fois par Newton ([1]) ; elles définissent

---

([1]) *Analysis per aequationes*... (*Isaaci Newtoni*... *opuscula mathematica*, éd. Castillon, t. I, p. 22).

$\cos x$ comme *fonction paire de x*, et $\sin x$ comme *fonction impaire de x*; par suite

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \sin(-x) = -\sin x.$$

Dérivées de $\cos x$ et de $\sin x$. — Si l'on pose

$$u = \cos x, \qquad v = \sin x,$$

en dérivant, on trouve

$$\begin{aligned} u' &= -\sin x, & u'' &= -\cos x, & u''' &= \sin x, & u^{\text{IV}} &= \cos x, \\ v' &= \cos x, & v'' &= -\sin x, & v''' &= -\cos x, & v^{\text{IV}} &= \sin x; \end{aligned}$$

les dérivées successives de $\cos x$ et de $\sin x$ se reproduisent donc de quatre en quatre.

Formules d'addition de $\cos x$ et de $\sin x$. — On a, quels que soient x et h (p. 88),

$$\cos(x+h) = \cos x - \frac{h}{1}\sin x - \frac{h^2}{1.2}\cos x + \frac{h^3}{1.2.3}\sin x + \frac{h^4}{1.2.3.4}\cos x - \ldots,$$

$$\sin(x+h) = \sin x + \frac{h}{1}\cos x - \frac{h^2}{1.2}\sin x - \frac{h^3}{1.2.3}\cos x + \frac{h^4}{1.2.3.4}\sin x + \ldots.$$

c'est-à-dire

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h,$$
$$\sin(x+h) = \cos x \sin h + \sin x \cos h;$$

ce sont les *formules d'addition* des fonctions $\cos x$ et $\sin x$. On peut les vérifier au moyen de la multiplication des séries.

Relation fondamentale. — La première des formules d'addition donne, pour $h = -x$,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1;$$

cette relation, dite *relation fondamentale*, permet d'exprimer $\cos x$ en fonction de $\sin x$ et inversement.

Application. Dérivée de $\operatorname{tang} x$. — Soit

$$y = \frac{\sin x}{\cos x};$$

on a

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x};$$

la dérivée de $\tang x$ est donc

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Limite du rapport $\frac{\sin x}{x}$ pour $x = 0$. — Si l'on considère la série entière

$$1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2\ldots(2n+1)} + \ldots,$$

dont le rayon de convergence est infini, pour $x = 0$ sa somme se réduit à l'unité; il en résulte, d'après le théorème d'Abel, que le rapport $\frac{\sin x}{x}$ a pour limite l'unité lorsque x tend vers zéro ([1]).

Nombre π. — Si l'on pose

$$\sin x = \frac{x}{1}\left[1 - \frac{x^2}{2.3}\right] + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\left[1 - \frac{x^2}{6.7}\right] + \ldots$$
$$+ \frac{x^{4n+1}}{1.2\ldots(4n+1)}\left[1 - \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)}\right] + \ldots,$$

on voit que $\sin x$ est positif pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle $(0, 2)$; la fonction $\cos x$ est, par suite, décroissante dans cet intervalle, sa dérivée $-\sin x$ y étant toujours négative. D'autre part,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}\left[1 - \frac{x^2}{7.8}\right] - \ldots$$
$$- \frac{x^{4n-2}}{1.2\ldots(4n-2)}\left[1 - \frac{x^2}{(4n-1)4n}\right] - \ldots,$$

de sorte que, pour $x = 2$, toutes les différences entre crochets sont positives, tandis que, pour cette même valeur, le trinôme formé par les trois premiers termes est négatif. Ainsi, la fonction continue $\cos x$ est positive pour $x = 0$ et négative pour $x = 2$; elle s'annule donc pour une valeur intermédiaire, et pour une seule, puisqu'elle est constamment décroissante. On désigne par

---

([1]) C'est à Cotes que l'on doit l'évaluation de cette limite.

la lettre π le double de cette racine (¹); de la relation

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

on déduit alors

$$\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1;$$

or, on ne peut admettre que $\sin\frac{\pi}{2}$ soit égal à -1, puisque, dans l'intervalle $(0, 2)$, la fonction $\sin x$ est positive, par suite

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

et l'on tire des formules d'addition

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x,$$

d'où

$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \qquad \sin(x + \pi) = -\sin x,$$

et enfin

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

D'une manière générale,

$$\cos(2k\pi + x) = \cos x, \qquad \cos(\overline{2k + 1}\,\pi + x) = -\cos x,$$
$$\sin(2k\pi + x) = \sin x, \qquad \sin(\overline{2k + 1}\,\pi + x) = -\sin x,$$
$$\operatorname{tang}(k\pi + x) = \operatorname{tang} x.$$

Une fonction $f(x)$ est *périodique* s'il existe un nombre h tel qu'elle ne change pas, quel que soit x, quand on y remplace x par $x + h$, de sorte que

$$f(x + h) = f(x);$$

la plus petite valeur de h vérifiant cette relation se nomme la *période*.

Les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont donc périodiques (²); le

---

(¹) L'usage de la lettre π pour désigner ce nombre remonte à Barrow, géomètre anglais du XVIIᵉ siècle (*Isaaci Barrow... Lectiones*, Londini, 1683-1684, p. 343).

(²) « Cette propriété importante manifeste d'une manière toute particulière la différence de nature des fonctions qui la possèdent, avec les fonctions rationnelles et algébriques..., et leur imprime leur caractère le plus apparent, en quelque sorte, de fonctions transcendantes. C'est d'ailleurs par la périodicité que les sinus et cosinus interviennent dans presque toutes les questions de l'Analyse, depuis les études qui ont pour objet les propriétés abstraites des nombres entiers, jusqu'aux applications du calcul à la Physique et à l'Astronomie ». (HERMITE, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, t. I, p. 41.)

nombre π est leur demi-période. C'est là certainement la véritable définition de ce nombre, dont l'importance dans la Science est comparable à celle du nombre e, importance dont ses innombrables propriétés analytiques peuvent seules faire concevoir l'étendue.

Irrationalité du nombre π. — Soit

$$y = \frac{\sin x}{x};$$

si l'on pose

$$y_1 = -\frac{1}{x}y', \quad y_2 = -\frac{1}{x}y'_1, \quad y_3 = -\frac{1}{x}y'_2, \quad \ldots, \quad y_n = -\frac{1}{x}y'_{n-1},$$

on a

$$y_1 = \frac{1}{x^3}(\sin x - x\cos x),$$

$$y_2 = \frac{1}{x^5}[(3 - x^2)\sin x - 3x\cos x],$$

$$y_3 = \frac{1}{x^7}[(15 - 6x^2)\sin x - (15x - x^3)\cos x],$$

et, en général,

$$y_m = \frac{1}{x^{2m+1}}[f(x)\sin x - g(x)\cos x],$$

en désignant par $f(x)$ et $g(x)$ des polynômes à coefficients entiers, et de degrés m et $m - 1$ ou $m - 1$ et m, suivant que m est pair ou impair; pour le vérifier, il suffit de supposer la relation établie pour y_m, on constate qu'elle subsiste pour y_{m+1}; or, elle a lieu pour les valeurs 1, 2, 3 de m, elle est donc démontrée pour toute valeur de cet indice.

D'autre part,

$$y = 1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

d'où

$$y_1 = \frac{1}{1.3}\left(1 - \frac{x^2}{2.5} + \frac{x^4}{2.4.5.7} - \ldots\right),$$

$$y_2 = \frac{1}{1.3.5}\left(1 - \frac{x^2}{2.7} + \frac{x^4}{2.4.7.9} - \ldots\right),$$

$$y_3 = \frac{1}{1.3.5.7}\left(1 - \frac{x^2}{2.9} + \frac{x^4}{2.4.9.11} - \ldots\right),$$

et, en général,

$$y_m = \frac{1}{1.3.5\ldots(2m+1)}\left[1 - \frac{x^2}{2(2m+3)} + \frac{x^4}{2.4(2m+3)(2m+5)} - \ldots\right];$$

par suite,

$$f(x)\sin x - g(x)\cos x = \frac{x^{2m+1}}{1.3.5\ldots(2m+1)}\,S,$$

en appelant S la somme de la série alternée convergente

$$1 - \frac{x^2}{2(2m+3)} + \frac{x^4}{2.4(2m+3)(2m+5)} - \ldots.$$

Soit S_{2p} la somme des $2p$ premiers termes de cette série; si l'on suppose

$$1 - \frac{x^2}{2(2m+3)} > 0,$$

inégalité qui est satisfaite quand x est égal à $\frac{\pi}{2}$, valeur comprise entre 0 et 2, on a (p. 42)

$$1 - \frac{x^2}{2(2m+3)} < S_{2p} < 1;$$

ainsi, la somme S est positive et ne dépasse pas l'unité.

Si maintenant on admet que $\frac{\pi}{2}$ est égal au quotient $\frac{b}{a}$ de deux entiers a, b, le polynôme $f(x)$, dont le degré est m par exemple, devient, pour $x = \frac{b}{a}$, une fraction ayant pour dénominateur a^m et pour numérateur un entier A, de sorte que

$$A = a^m \frac{x^{2m+1}}{1.3.5\ldots(2m+1)}\,S;$$

le second membre n'étant pas nul, il en est de même de l'entier A; or, le coefficient de S peut être considéré comme le $m^{\text{ième}}$ terme d'une série convergente, et, puisque S ne dépasse pas l'unité, il résulterait de la relation précédente que, en prenant m assez grand, l'entier positif non nul A serait arbitrairement petit, conclusion inadmissible; donc $\frac{\pi}{2}$, et par suite π, est irrationnel. Il en est de

même de son carré; car, le polynôme $f(x)$ ne contenant que des puissances entières de x^2, si l'on y remplace x^2 par $\frac{\pi^2}{4}$ supposé égal au quotient de deux entiers, on obtient la même égalité finale, et un raisonnement identique est applicable.

C'est Lambert [1] qui, le premier, a prouvé que le nombre π était irrationnel; plus tard, Legendre [2] a fait voir qu'il en était de même de son carré; enfin Lindemann [3] a établi que le nombre π est, comme le nombre e, un nombre transcendant.

La démonstration que nous venons de donner, remarquable par son élégance et sa simplicité, est due à Hermite [4].

Variations de $\cos x$ et de $\sin x$. — Le tableau suivant indique les variations de $\cos x$ et de $\sin x$; le sens de ces variations est donné, dans chaque intervalle, par le signe de $-\sin x$, dérivée de $\cos x$, ou par le signe de $\cos x$, dérivée de $\sin x$:

x......	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0
$\cos x$...	1	décroît	0	décroît	-1	croît	0	croît	1
$\sin x$...	0	croît	1	décroît	0	décroît	-1	croît	0

x......	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$...	1	décroît	0	décroît	-1	croît	0	croît	1
$\sin x$...	0	croît	1	décroît	0	décroît	-1	croît	0

Arcs correspondant à un cosinus, à un sinus ou à une tangente donnés. — Soit x_0 un arc déterminé; on se propose d'abord de trouver tous les arcs qui ont pour cosinus le nombre $\cos x_0$, c'est-à-dire de résoudre l'équation fonctionnelle

$$\cos x - \cos x_0 = 0;$$

---

(1) *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques* (*Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres* [*de Berlin*], 1761, p. 265-322).

(2) *Éléments de Géométrie*, Note IV.

(3) *Ueber die Zahl* π, dans les *Mathematische Annalen*, t. XX, 1882, p. 213-225.

(4) *Faculté des Sciences de Paris. — Cours de M. Hermite rédigé en* **188** *par M. Andoyer*, 4e éd., p. 74-75.

or,

$$\cos\left(\frac{x+x_0}{2}+\frac{x-x_0}{2}\right)=\cos\frac{x+x_0}{2}\cos\frac{x-x_0}{2}-\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2},$$

$$\cos\left(\frac{x+x_0}{2}-\frac{x-x_0}{2}\right)=\cos\frac{x+x_0}{2}\cos\frac{x-x_0}{2}+\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2};$$

si l'on retranche la seconde de ces relations de la première, on voit que l'équation à résoudre revient à celle-ci

$$\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}=0;$$

en désignant par k un entier positif, nul ou négatif, on déduit de là, d'après les variations de $\sin x$,

$$\frac{x+x_0}{2}=k\pi, \qquad \frac{x-x_0}{2}=k\pi,$$

d'où la solution générale

$$x=2k\pi\pm x_0.$$

On verrait de même que les arcs correspondant à un sinus donné $\sin x_0$ sont compris dans les deux formules

$$x=2k\pi+x_0,$$
$$x=(2k+1)\pi-x_0.$$

Enfin, si $\operatorname{tang} x_0$ est une tangente donnée, les arcs dont la tangente est $\operatorname{tang} x_0$ sont fournis par la relation

$$x=k\pi+x_0.$$

Représentation géométrique de $\cos x$ et de $\sin x$. Longueur de la circonférence. — Si l'on pose

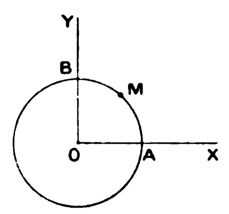
$$X=\cos x, \qquad Y=\sin x,$$

on en déduit

$$X^2+Y^2=1,$$

par conséquent le point $M(X, Y)$ décrit, quand x varie, une circonférence de centre à l'origine et de rayon égal à l'unité.

Soient M_0 et M deux points de cette circonférence, correspondant aux valeurs x_0 et x de la variable, et M_1, M_2, ..., M_{n-1}



d'autres points, compris entre M_0 et M, et correspondant à des valeurs croissantes $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de x. On a, d'après la définition de la dérivée,

$$\cos x_p - \cos x_{p+1} = (x_{p+1} - x_p)(\sin x_p + \varepsilon),$$
$$\sin x_{p+1} - \sin x_p = (x_{p+1} - x_p)(\cos x_p + \eta),$$

les infiniment petits ε et η tendant vers zéro en même temps que la différence $x_{p+1} - x_p$; si donc on désigne par α_p cette différence et par β_p la corde $M_p M_{p+1}$, en ajoutant les relations précédentes après les avoir élevées au carré, on peut poser

$$\beta_p = \alpha_p(1 + \varepsilon_p),$$

l'infiniment petit ε_p tendant vers zéro en même temps que α_p, de sorte que les rapports

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0}, \quad \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}}$$

ont tous l'unité pour limite; on en conclut que, lorsque n augmente indéfiniment, la fraction

$$\frac{\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}},$$

qui reste toujours comprise entre le plus grand et le plus petit de ces rapports, tend aussi vers l'unité; mais, le dénominateur est égal à $x - x_0$, quelque grand que soit n; par suite la limite du numérateur pour $n = \infty$, c'est-à-dire la limite du périmètre du contour polygonal $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, M$, lorsque ses côtés tendent vers zéro, est $x - x_0$. Cette limite, indépendante de la loi suivant

laquelle le nombre des côtés du contour polygonal inscrit dans l'arc M_0M croît indéfiniment, est, par définition, la *mesure* de cet arc. Ainsi, le point M_0 se trouvant en A sur l'axe OX, la variable x représente la mesure de l'arc AM; lorsque le point M vient à coïncider avec B sur l'axe OY, $\cos x$ étant nul, la variable x est égale à $\frac{\pi}{2}$; par suite, le quadrant AB a pour mesure $\frac{\pi}{2}$, et la circonférence entière 2π. La signification géométrique du nombre π n'est donc que la simple conséquence de l'une de ses propriétés analytiques.

Le nombre π étant irrationnel, le rapport de la circonférence au diamètre est incommensurable.

On a donné le nom de *quadrature du cercle* au problème qui consisterait à construire, par l'intermédiaire d'un nombre fini de droites et de cercles, un segment rectiligne de longueur rigoureusement égale à celle de la circonférence, et, par suite, un carré de surface équivalente. La possibilité d'une telle construction serait démontrée si le nombre π était susceptible d'être racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels. Cette question, qui, pendant quatre mille ans, agita l'esprit des géomètres [1], n'a été définitivement résolue qu'en 1882; car Lindemann, en établissant la transcendance du nombre π [2], a prouvé par là même l'impossibilité de la quadrature du cercle au moyen de la règle et du compas. Il est d'ailleurs facile de la réaliser en employant une courbe transcendante [3].

On voit, d'après les considérations géométriques qui viennent d'être développées, que les fonctions circulaires, telles qu'elles

---

(1) Le problème de la quadrature du cercle est déjà posé sous sa forme habituelle dans le *Papyrus Rhind*, le document mathématique le plus ancien qui existe (1800 ans avant Jésus-Christ). L'auteur du papyrus, Aähmès, en donne une solution grossièrement approchée.

(2) « Cette preuve de la transcendance de π ne diminuera guère d'ailleurs le nombre de ceux qui cherchent toujours la quadrature du cercle, car cette classe d'individus a toujours fait preuve d'une défiance absolue envers les mathématiciens et d'un mépris pour les mathématiques qu'aucune démonstration ne saurait désarmer ». (Félix Klein, *Conférences sur les Mathématiques*... traduites par L. Laugel, p. 52.)

(3) *Voir* : F. Klein, *Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire*... rédaction française... par J. Griess, p. 94-96.

ont été définies, ne diffèrent point de celles étudiées en Trigonométrie. Il était cependant nécessaire de leur donner une origine purement analytique, et d'en exposer les principales propriétés en dehors des théories de la géométrie, afin de montrer que leur existence est indépendante de tout postulat ([1]).

Multiplication des arcs. — La formule d'addition des fonctions $\cos x$ et $\sin x$ donne successivement :

$$\begin{aligned}
&\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,\\
&\cos 3x = \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x,\\
&\cos 4x = \cos^4 x - 6\sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\sin 2x = 2\sin x \cos x,\\
&\sin 3x = 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x,\\
&\sin 4x = 4\sin x \cos^3 x - 4\sin^3 x \cos x,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;
\end{aligned}$$

on est donc conduit à poser

$$\begin{aligned}
\cos nx &= \cos^n x + a_2 \sin^2 x \cos^{n-2} x + a_4 \sin^4 x \cos^{n-4} x + \dots,\\
\sin nx &= n \sin x \cos^{n-1} x + a_3 \sin^3 x \cos^{n-3} x + a_5 \sin^5 x \cos^{n-5} x + \dots.
\end{aligned}$$

Si l'on suppose ces relations établies pour $n = m$, elles subsistent pour $n = m + 1$; on le vérifie aisément au moyen des formules

$$\begin{aligned}
\cos(n+1)x &= \cos nx \cos x - \sin nx \sin x,\\
\sin(n+1)x &= \cos nx \sin x + \sin nx \cos x;
\end{aligned}$$

et, comme elles sont démontrées pour les valeurs 2, 3, 4 de n, on en conclut qu'elles sont générales. Pour déterminer les coefficients a_2, a_3, a_4, a_5, ..., il suffit d'identifier les développements précédents avec ceux que l'on obtient en les dérivant; on trouve

---

([1]) « Il y a un intérêt philosophique évident à introduire dans l'analyse le moins possible de données expérimentales, et il importe par conséquent de donner des fonctions $\sin x$ et $\cos x$ une définition qui repose uniquement sur la notion de nombre et n'emprunte rien à l'idée d'espace ». (Jules Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. 147.)

de degré n qui s'annule pour les n valeurs suivantes de la variable

$$-\frac{(n-1)\pi}{2n},\quad \dots,\quad -\frac{3\pi}{2n},\quad -\frac{\pi}{2n},\quad \frac{\pi}{2n},\quad \frac{3\pi}{2n},\quad \dots,\quad \frac{(n-1)\pi}{2n};$$

ce polynôme est donc divisible par chacun des binômes

$$1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{2n}},\quad 1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{3\pi}{2n}},\quad \dots,\quad 1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\overline{n-1}\,\pi}{2n}},$$

et, comme il se réduit à l'unité pour $\sin x = 0$, il est égal à leur produit.

Si l'on considère maintenant la fonction

$$\frac{\sin nx}{n\sin x\cos x},$$

on voit qu'elle a pour expression un polynôme entier en $\sin x$ de degré $n-2$ qui s'annule pour les valeurs suivantes de la variable

$$-\frac{(n-2)\pi}{2n},\quad \dots,\quad -\frac{4\pi}{2n},\quad -\frac{2\pi}{2n},\quad \frac{2\pi}{2n},\quad \frac{4\pi}{2n},\quad \dots,\quad \frac{(n-2)\pi}{2n};$$

ce polynôme est donc divisible par chacun des binômes

$$1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{2n}},\quad 1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{4\pi}{2n}},\quad \dots,\quad 1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\overline{n-2}\,\pi}{2n}},$$

et, comme il se réduit aussi à l'unité pour $\sin x = 0$, il est égal à leur produit.

Si l'on remplace x par $\frac{x}{n}$, il résulte de ce qui précède que l'on peut poser, pour n pair,

$$\cos x = \left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{3\pi}{2n}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{\overline{n-1}\,\pi}{2n}}\right),$$

$$\sin x = n\,.\,\sin\frac{x}{n}\cos\frac{x}{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{\overline{n-2}\,\pi}{2n}}\right)$$

On obtiendrait de même, pour n impair,

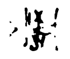
$$\cos x = \cos\frac{x}{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{3\pi}{2n}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{n-2\pi}{2n}}\right),$$

$$\sin x = n\sin\frac{x}{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{4\pi}{2n}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{n-1\pi}{2n}}\right).$$

Développement de $\sin x$ et de $\cos x$ en produits infinis. — On peut poser

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}$$
$$\times\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

La variable x ayant une valeur déterminée, si m est un entier



supérieur à la valeur absolue du rapport $\frac{x}{\pi}$, en prenant n supérieur à m, les facteurs du produit

$$R_m = \left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{(m+1)\pi}{2n+1}}\right]\left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{(m+2)\pi}{2n+1}}\right]\cdots\left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right]$$

sont tous positifs et inférieurs à l'unité; par suite, le produit R_m, lui-même inférieur à l'unité, vérifie l'inégalité

$$R_m > 1-\left[\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{(m+1)\pi}{2n+1}}+\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{(m+2)\pi}{2n+1}}+\cdots+\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right].$$

Tous les arcs qui figurent dans l'expression précédente sont compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; or, quand x croît en valeur absolue de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le rapport $\frac{\sin x}{x}$ décroît de 1 à $\frac{2}{\pi}$, et l'on a

$$\frac{4x^2}{\pi^2} < \sin^2 x < x^2;$$

en appliquant ces inégalités aux seconds termes des facteurs de R_m, on obtient

$$R_m > 1 - \frac{x^2}{4}\left[\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right],$$

d'où, à plus forte raison,

$$R_m > 1 - \frac{x^2}{4}\left[\frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \ldots\right],$$

c'est-à-dire (p. 28)

$$R_m > 1 - \frac{x^2}{4m};$$

comme R_m est inférieur à l'unité, soit

$$R_m = 1 - \theta_n \frac{x^2}{4m},$$

en désignant par θ_n un nombre positif moindre que l'unité et d'ailleurs variable avec x, n et m; l'expression de $\sin x$ devient alors

$$\sin x = P_m\left(1 - \theta_n \frac{x^2}{4m}\right),$$

en posant

$$P_m = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1} \times \left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{m\pi}{2n+1}}\right).$$

Quand n croît indéfiniment, le produit

$$(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}$$

tend vers x, et, pour une valeur déterminée de k, la limite du rapport

$$\frac{\sin\frac{x}{2n+1}}{\sin\frac{k\pi}{2n+1}}$$

est $\frac{x}{k\pi}$; quant au facteur $1 - \theta_n \frac{x^2}{4m}$, il a nécessairement aussi une limite, puisqu'il est égal au quotient de deux expressions qui en ont une; mais θ_n seul varie dans ce facteur; donc θ_n a une limite θ,

et l'expression de $\sin x$ prend la forme nouvelle

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)\left(1 - \theta\,\frac{x^2}{4m}\right).$$

Si maintenant on fait croître m indéfiniment, on trouve

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots;$$

tel est le développement de $\sin x$ en produit infini.

On établirait de même le développement de $\cos x$, mais il est plus simple de le déduire de la relation

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x}:$$

on obtient ainsi

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

Ces deux formules sont dues à Euler [1], qui les a démontrées au moyen de considérations d'un autre ordre.

Le produit des deux expressions

$$\left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{p}\right),$$
$$\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right)\cdots\left(1 + \frac{x}{q}\right),$$

a pour limite le rapport $\frac{\sin x}{\pi x}$, quand p et q deviennent infinis en restant égaux. Mais il en est autrement si p et q croissent séparément au delà de toute limite, et l'on voit facilement pour quelle raison.

Formule de Wallis. — Si dans l'expression

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

(1) *Introductio in Analysin infinitorum*, t. I, § 156.

on fait $x = \frac{\pi}{2}$, elle devient

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{36}\right)\cdots;$$

le facteur général de ce produit peut se mettre sous la forme

$$1 - \frac{1}{4n^2} = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n+1}{2n},$$

donc

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\cdots;$$

cette formule célèbre, à laquelle Wallis est parvenu par induction dans son *Arithmetica infinitorum* (¹), définit $\frac{\pi}{2}$ comme la limite du produit d'une infinité de fractions alternativement supérieures et inférieures à l'unité.

Développement de $\log\frac{\sin x}{x}$, $\log\cos x$ et $\log\frac{\tang x}{x}$ en séries entières. — Soient P_n le produit des n premiers facteurs de $\frac{\sin x}{x}$, et R_n le produit des facteurs suivants; la limite de R_n est l'unité; par suite, la valeur absolue de x étant inférieure à π, on a

$$\log\frac{\sin x}{x} = \log\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) + \ldots$$

Mais, pour toute valeur de x intérieure à l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, les termes de cette série sont développables suivant les séries entières absolument convergentes

$$\log\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) = -\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{x^6}{\pi^6} - \ldots,$$

$$\log\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) = -\frac{x^2}{2^2\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{2^4\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{x^6}{2^6\pi^6} - \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\log\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = -\frac{x^2}{n^2\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{n^4\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{x^6}{n^6\pi^6} - \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

(¹) *Johannis Wallis... opera mathematica*, t. I, prop. CXCI, p. 469. L'*Arithmetica infinitorum* a été publiée à Oxford en 1655.

$$= -\frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^4}{2880} - \frac{\pi^6}{362880} - \dots$$

Développement de $x \cot x$ et de $\operatorname{tang} x$ en séries entières. — Si l'on dérive les développements

$$\log \frac{\sin x}{x} = -\frac{S_2}{\pi^2} x^2 - \frac{1}{2} \frac{S_4}{\pi^4} x^4 - \frac{1}{3} \frac{S_6}{\pi^6} x^6 - \dots,$$

$$\log \cos x = -2^2 \frac{T_2}{\pi^2} x^2 - \frac{1}{2} 2^4 \frac{T_4}{\pi^4} x^4 - \frac{1}{3} 2^6 \frac{T_6}{\pi^6} x^6 - \dots,$$

on en déduit

$$x \cot x = 1 - 2 \frac{S_2}{\pi^2} x^2 - 2 \frac{S_4}{\pi^4} x^4 - 2 \frac{S_6}{\pi^6} x^6 - \dots, \qquad -\pi < x < \pi,$$

$$\operatorname{tang} x = 2^3 \frac{T_2}{\pi^2} x + 2^5 \frac{T_4}{\pi^4} x^3 + 2^7 \frac{T_6}{\pi^6} x^5 + \dots, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

On pourrait d'ailleurs établir par la méthode des coefficients indéterminés les développements en séries entières de $x \cot x$ et de $\operatorname{tang} x$ (p. 98), car

$$x \cot x = x \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

rapports dont les deux termes sont développables en séries entières.

Expression des sommes S_{2n} et T_{2n} en fonction du nombre de Bernoulli B_n. — Soit

$$y = 1 - 2 \frac{S_2}{\pi^2} x^2 - 2 \frac{S_4}{\pi^4} x^4 - 2 \frac{S_6}{\pi^6} x^6 - \dots.$$

Si l'on se reporte aux développements en séries entières de $\cos x$ et de $\sin x$, on reconnaît immédiatement que

$$(\cos x)_0^{(2n)} = (-1)^n, \qquad (\sin x)_0^{(2n+1)} = (-1)^n,$$

$$(\cos x)_0^{(2n+1)} = 0, \qquad (\sin x)_0^{(2n)} = 0,$$

par suite, en prenant la dérivée $(2n+1)^{\text{ième}}$ des deux membres de la relation

$$y \sin x = x \cos x,$$

on trouve, pour $x = 0$,

$$\frac{2n+1}{1} y_0^{(2n)} - \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3} y_0^{(2n-2)} + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{(2n+1)2n}{1.2} y_0'' - (-1)^n 2n = 0.$$

Or, les nombres de Bernoulli B_k sont déterminés par la relation de récurrence (p. 117)

$$\frac{2k-1}{1}2^{2k}B_k - \frac{(2k-1)(2k-2)(2k-3)}{1.2.3}2^{2k-2}B_{k-1} + \dots$$
$$\dots + (-1)^{k-1}\frac{(2k-1)2k}{1.2}2^2B_1 + (-1)^k 2k = 0;$$

donc

$$-\gamma_1^{2k} = 2^{2k}B_k,$$

c'est-à-dire

$$S_{2k} = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{1.2\ldots 2k}B_k;$$

cette importante relation a été découverte par Euler (1). Il est facile d'en tirer l'expression de T_{2k} en fonction de B_k. En effet,

$$\frac{1}{2^{2k}}S_{2k} = \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{6^{2k}} + \dots,$$

d'où

$$T_{2k} = S_{2k} - \frac{1}{2^{2k}}S_{2k},$$

par conséquent,

$$T_{2k} = \frac{1}{2}\,\frac{(2^{2k}-1)\pi^{2k}}{1.2\ldots 2k}B_k.$$

Si, dans la formule

$$S_{2k} = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{1.2\ldots 2k}B_k,$$

on donne successivement à k les valeurs 1, 2, 3, ..., on en déduit

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$$
$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots,$$
$$\frac{\pi^6}{945} = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

ces résultats remarquables ont été trouvés par Euler (2).

(1) *Institutiones Calculi differentialis*, partie 2, § 125.

(2) *Commentarii Academiae Scientiarum imperialis petropolitanae*, t. VII [illegible].

$\pi = 3.14159265\ldots$
$\pi^2 = 9.8696045\ldots$
$\pi^3 = 31.0062857\ldots$
$\pi^4 = 97.4091136\ldots$
$\pi^5 = 306.01979\ldots$
$\pi^6 = 961.38956\ldots$
$\pi^7 = 3020.294\ldots$
$\pi^8 = 9488.536\ldots$
$\pi^9 = 29809.116\ldots$
$\pi^{10} = 93648.109\ldots$

On n'a pas réussi jusqu'à présent à déterminer la somme S_n pour les valeurs impaires de n.

On obtient de même, au moyen de la relation

$$T_{2n} = \frac{1}{2}\,\frac{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{1.2\ldots 2n}\,B_n,$$

les séries suivantes

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots,$$
$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \ldots,$$
$$\frac{\pi^6}{960} = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lorsqu'on remplace les sommes S_2, S_4, S_6, ..., T_2, T_4, T_6, ..., par leurs valeurs en fonction de B_1, B_2, B_3, ..., les divers développements en séries entières précédemment établis deviennent

$$\log\frac{\sin x}{x} = -2\frac{B_1}{1}\frac{x^2}{1.2} - 2^3\frac{B_2}{2}\frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$
$$\log\cos x = -2(2^2-1)\frac{B_1}{1}\frac{x^2}{1.2} - 2^3(2^4-1)\frac{B_2}{2}\frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$
$$\log\frac{\operatorname{tang} x}{x} = 2^2(2-1)\frac{B_1}{1}\frac{x^2}{1.2} + 2^4(2^3-1)\frac{B_2}{2}\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots;$$

et

$$\operatorname{tang} x = 2^2(2^2-1)B_1\frac{x}{1.2} + 2^4(2^4-1)B_2\frac{x^3}{1.2.3.4} + \ldots,$$
$$x\cot x = 1 - 2^2B_1\frac{x^2}{1.2} - 2^4B_2\frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots;$$

ou bien, en effectuant le calcul numérique des coefficients,

$$\log\frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \ldots,$$
$$\log\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \ldots,$$
$$\log\frac{\operatorname{tang} x}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2835} + \ldots;$$

et

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots,$$
$$x\cot x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \ldots.$$

Application. — On a déjà rencontré, à propos des nombres de Bernoulli (p. 117), la série

$$x\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = 1 + 2^2 B_1 \frac{x^2}{1.2} - 2^4 B_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

mais son rayon de convergence n'a pas été déterminé; on peut le calculer de la manière suivante :

On a

$$B_n = \frac{1.2\ldots 2n}{2^{2n-1}\pi^{2n}} S_{2n},$$

par suite, si u_n est la valeur absolue du terme général de la série considérée, on trouve

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{S_{2n+2}}{S_{2n}} \frac{x^2}{\pi^2},$$

d'où, comme S_{2n} décroît quand n augmente,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{x^2}{\pi^2};$$

ainsi, lorsque x reste à l'intérieur de l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, les valeurs absolues des termes de la série alternée vont constamment en décroissant; elles tendent d'ailleurs vers zéro; le rayon de convergence est donc égal à π.

Développement de $x\,\text{coséc}\,x$ et de $\text{séc}\,x$ en séries entières. Nombres d'Euler. — Si, dans la relation

$$x\,\text{coséc}\,x = \frac{x}{2}\,\text{tang}\,\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2},$$

on remplace $x\,\text{tang}\,\frac{x}{2}$ et $x\cot\frac{x}{2}$ par leurs développements en séries entières, on obtient

$$x\,\text{coséc}\,x = 1 + (2^2-2)B_1\frac{x^2}{1.2} + (2^4-2)B_2\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots, \quad -\pi < x < \pi.$$

Quant à la fonction $\text{séc}\,x$, elle est égale au produit des fonctions $\frac{\text{tang}\,x}{x}$ et $x\,\text{coséc}\,x$, toutes deux développables en séries entières à l'intérieur de l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$; la fonction $\text{séc}\,x$

est donc elle-même développable en série entière, pour les valeurs de x comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; elle reste d'ailleurs invariable, quand on y change x en $-x$, et, comme elle se réduit à l'unité lorsque x s'annule, son développement est nécessairement de la forme

$$\text{séc}\,x = 1 + E_1\frac{x^2}{1.2} + E_2\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + E_n\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots,\qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};$$

pour déterminer les coefficients $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, il suffit de multiplier cette série par la suivante

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots,$$

et d'annuler dans le produit le coefficient de x^{2n}; on trouve ainsi

$$1 - \frac{2n(2n-1)}{1.2}E_1 + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4}E_2 - \ldots + (-1)^n E_n = 0,$$

formule qui permet de calculer successivement $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$. Si l'on donne à n les valeurs 1, 2, 3, ..., on obtient

$$1 - E_1 = 0,$$
$$1 - \frac{4.3}{1.2}E_1 + E_2 = 0,$$
$$1 - \frac{6.5}{1.2}E_1 + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}E_2 - E_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où

$$E_1 = 1,\quad E_2 = 5,\quad E_3 = 61,\quad \ldots;$$

$E_4 = 1385$
$E_5 = 50521$

on voit que les nombres $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ sont tous entiers. Ces nombres ont été appelés par Scherk *nombres d'Euler*; c'est, en effet, Euler qui a calculé les neuf premiers [1].

Lorsqu'on y remplace les coefficients par leurs valeurs numériques, les développements de $x\,\text{coséc}\,x$ et de $\text{séc}\,x$ deviennent

$$x\,\text{coséc}\,x = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \frac{31}{15120}x^6 + \ldots,$$
$$\text{séc}\,x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \ldots.$$

(1) *Institutiones Calculi differentialis*, partie 2, § 224. La valeur donnée par Euler pour E_9 est fautive.

Développement de $\cot x$ et de $\operatorname{tang} x$ en séries de fractions simples. — Si, dans la série entière

$$\frac{1}{x} - \cot x = 2\frac{S_2}{\pi^2}x + 2\frac{S_4}{\pi^4}x^3 + 2\frac{S_6}{\pi^6}x^5 + \ldots,$$

on développe les sommes $S_2, S_4, S_6, \ldots$, puis que l'on groupe les termes dont les dénominateurs forment les puissances paires successives d'un même multiple de π, on obtient ainsi les progressions suivantes

$$\frac{2x}{\pi^2 - x^2} = \frac{2x}{\pi^2} + \frac{2x^3}{\pi^4} + \frac{2x^5}{\pi^6} + \ldots,$$

$$\frac{2x}{4\pi^2 - x^2} = \frac{2x}{2^2\pi^2} + \frac{2x^3}{2^4\pi^4} + \frac{2x^5}{2^6\pi^6} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2} = \frac{2x}{n^2\pi^2} + \frac{2x^3}{n^4\pi^4} + \frac{2x^5}{n^6\pi^6} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ces séries sont absolument convergentes pour toutes les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-\pi, +\pi)$; d'ailleurs, dans cet intervalle, la série de terme général

$$\frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}$$

est absolument convergente, comme on le constate en appliquant une règle connue (p. 38); par suite, d'après le théorème des séries de séries,

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{9\pi^2 - x^2} - \ldots,$$

ou

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \ldots;$$

tel est le développement de $\cot x$ en série de fractions simples. Si l'on change x en $\frac{\pi}{2} - x$, on obtient

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} + \frac{1}{3\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{3\frac{\pi}{2} + x} + \ldots,$$

ou

$$\operatorname{tang} x = \frac{2x}{\frac{\pi^2}{4} - x^2} + \frac{2x}{9\frac{\pi^2}{4} - x^2} + \frac{2x}{25\frac{\pi^2}{4} - x^2} + \ldots.$$

résultats que l'on peut aussi déduire directement du développement de $\tang x$ en série entière.

Quand on substitue $x+\pi$ ou $x-\pi$ à x dans le développement de $\cot x$ en série de fractions simples, la disposition des termes est modifiée, mais les sommes des n premiers termes, dans la nouvelle série et dans la série primitive, ne diffèrent que par deux termes, de sorte qu'elles ont des limites identiques; le développement de $\cot x$ subsiste donc pour toute valeur de x. On verrait pareillement que le développement de $\tang x$ a lieu quel que soit x.

Si, dans le développement de $\cot x$, on donne à la variable la valeur πx, on trouve

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} + \ldots.$$

Cette formule est due, comme les précédentes, à Euler [1].

Le développement en fractions simples de la fonction $\tang x$ donne lieu à une remarque intéressante. Les deux séries, qui ont respectivement pour terme général

$$-\frac{1}{x-(2n+1)\frac{\pi}{2}}, \qquad -\frac{1}{x+(2n+1)\frac{\pi}{2}},$$

ne sont pas convergentes, mais, d'après ce qui précède, si l'on désigne par S_n et T_n les sommes des n premiers termes de chacune de ces deux séries, l'expression

$$S_n + T_n$$

tend vers $-\tang x$, quand n augmente indéfiniment. Si l'on considère maintenant les deux séries qui ont respectivement pour terme général

$$-\frac{1}{x-(2n+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}},$$

et

$$-\frac{1}{x+(2n+1)\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}},$$

[1] *Introductio in Analysim infinitorum*, t. I, § 172, 174, 178, 181.

on constate qu'elles sont absolument convergentes; aussi, en appelant P_p la somme des p premiers termes de la première et Q_q la somme des q premiers termes de la seconde, quelle que soit la manière suivant laquelle les nombres p et q varient quand ils croissent au delà de toute limite, l'expression

$$P_p + Q_q$$

tend toujours vers $-\tang x$. Ce résultat est une application d'un théorème très général dû à Mittag-Leffler (¹).

Développement de coséc x et de séc x en séries de fractions simples. — On a

$$\operatorname{coséc} x = \frac{1}{2}\tang\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2},$$

par suite

$$\operatorname{coséc} x = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right) - \left(\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right) + \ldots,$$

ou

$$\operatorname{coséc} x = \frac{1}{x} + \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} + \frac{2x}{9\pi^2 - x^2} - \ldots;$$

en remplaçant x par $\frac{\pi}{2} - x$, on obtient

$$\operatorname{séc} x = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x}\right) - \left(\frac{1}{3\frac{\pi}{2} - x} + \frac{1}{3\frac{\pi}{2} + x}\right) + \ldots,$$

ou

$$\operatorname{séc} x = \frac{\pi}{\frac{\pi^2}{4} - x^2} - \frac{3\pi}{9\frac{\pi^2}{4} - x^2} + \frac{5\pi}{25\frac{\pi^2}{4} - x^2} - \ldots;$$

si, dans cette relation, on fait $x = 0$, on trouve (*voir* p. 189)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

(¹) *Acta mathematica*, t. IV, 1884, p. 8. — *Voir* : JULES TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. 161-162.

Séries trigonométriques.

On donne le nom de *série trigonométrique* à toute série de la forme

$$a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots + a_n \cos n\theta + \ldots$$
$$+ b_1 \sin\theta + b_2 \sin 2\theta + \ldots + b_n \sin n\theta + \ldots.$$

On suppose ordinairement que les coefficients des cosinus et ceux des sinus ont le même signe ou sont alternativement positifs et négatifs ; il suffit, d'ailleurs, de remplacer θ par $\pi + \theta$ pour ramener le second cas au premier.

Les séries trigonométriques jouent un rôle considérable en Physique mathématique. C'est le problème de la possibilité de la représentation analytique des fonctions arbitraires, dont la question des cordes vibrantes a été l'origine, qui a conduit à la considération de ces séries. Les premières recherches sur ce sujet sont dues à d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli et Lagrange ; mais la théorie des séries trigonométriques n'accomplit de progrès véritables que beaucoup plus tard, grâce aux travaux de Fourier. Depuis, cette branche de l'Analyse a été l'objet de nombreux Mémoires ; il faut citer notamment ceux de Poisson, Dirichlet, Riemann (1).

Théorème. — *Si les coefficients* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, *supposés positifs, décroissent constamment à partir d'un certain rang et tendent vers zéro, les séries*

$$a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots + a_n \cos n\theta + \ldots,$$
$$b_1 \sin\theta + b_2 \sin 2\theta + \ldots + b_n \sin n\theta + \ldots$$

sont convergentes ; mais, pour la première, il y a doute si θ *est multiple de* 2π.

Soit d'abord

$$S_n = a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots + a_{n-1} \cos(n-1)\theta;$$

(1) *Voir*, pour l'histoire des séries trigonométriques, la Monographie de Sachse : *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 2e série, t. IV, 1880, p. 43-64 et p. 83-112.

Итак: $f(x)-f(x_0) \geqslant \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ar-1}\right)r^m$.

Но $(x-x_0) \leqslant \frac{3}{2}\frac{1}{a^m}$

Поэтому $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > \left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ar-1}\right)(ar)^m$

$$\lim_{m=\infty}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$$

Причина $f(x)-f(x_0) \geqslant \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ar-1}\right)\cdot r^m$ ~~[illegible]~~

$$x-x_0 \leqslant \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{a^m}$$

т.е. ~~$f(x)-f(x_0)$~~ $x-x_0$ высшего порядка малости,

~~чем $f(x)-f(x_0)$, ибо~~

~~$f(x)-f(x_0) \geqslant \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ar-1}\right)\frac{1}{a^m}$~~

чем $f(x)-f(x_0)$, ибо

$$(x-x_0) \leqslant \frac{3}{2}\cdot r^m\cdot\left[\frac{1}{(ar)^m}\right] \text{ при } ar>1.$$

—·——‡——·—

Si l'on applique au terme général de cette série la formule des accroissements finis, on constate que sa valeur absolue est moindre que $\pi(ar)^n$, de sorte que la somme S_m des m premiers termes vérifie l'inégalité

$$|S_m| < \pi \sum_{n=0}^{n=m-1} (ar)^n,$$

d'où

$$|S_m| < \frac{\pi}{ar-1}(ar)^m.$$

l'entier positif ou négatif le plus voisin

nombre, compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, tel

$$a^m x_0 = \alpha_m + \theta_m;$$

$$x = x_0 + \frac{\varepsilon_m - \theta_m}{a^m},$$

nombre égal à ± 1; la différence $x - x_0$ a

e la condition

$$|x - x_0| \leqq \frac{3}{2}\frac{1}{a^m};$$

vers zéro, lorsque m croît indéfiniment.

bre entier $a^m x$ ou $\alpha_m + \varepsilon_m$ étant de même

trouve, pour $n \geqq m$,

$$\alpha_m + \varepsilon_m) a^{n-m} = \quad (-1)^{\alpha_m+1},$$

$$(\alpha_m + \theta_m) a^{n-m} = -(-1)^{\alpha_m+1} \cos\pi\theta_m a^{n-m},$$

ste R_m relatif à S_m devient

$$\frac{-1)^{\alpha_m+1}}{x - x_0} \sum_{n=m}^{n=\infty} r^n(1 + \cos\pi\theta_m a^{n-m}).$$

$$\cos\pi\theta_m) + r^{m+1}(1 + \cos\pi\theta_m a) + \ldots$$

au moins égal à r^m, car $\pi\theta_m$ est compris entre

la dérivée de y par rapport à x a pour expression

$$y' = \frac{\cos\theta - x}{1 - 2x\cos\theta + x^2},$$

par suite, y' est développable, à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$, suivant la série entière

$$y' = \cos\theta + x\cos 2\theta + x^2\cos 3\theta + \ldots;$$

comme y_0 est nul, on a donc, quel que soit θ,

$$\log(1 - 2x\cos\theta + x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{1}\cos\theta + \frac{x^2}{2}\cos 2\theta + \frac{x^3}{3}\cos 3\theta + \ldots$$
$$-1 < x < 1;$$

quand x est égal à l'unité, cette série reste convergente, d'après le théorème précédent, pour toutes les valeurs de θ non égales à un multiple de 2π.

Fonction de Weierstrass. — On peut construire au moyen des séries trigonométriques des fonctions singulières dont le type est la fonction de Weierstrass.

Soient r un nombre compris entre 0 et 1, et a un entier impair supérieur à $\frac{1}{r}$; la série

$$\cos\pi x + r\cos\pi a x + r^2\cos\pi a^2 x + \ldots + r^n\cos\pi a^n x + \ldots$$

est absolument et uniformément convergente dans tout intervalle, ses termes ayant des valeurs absolues inférieures ou au plus égales aux termes correspondants de la progression

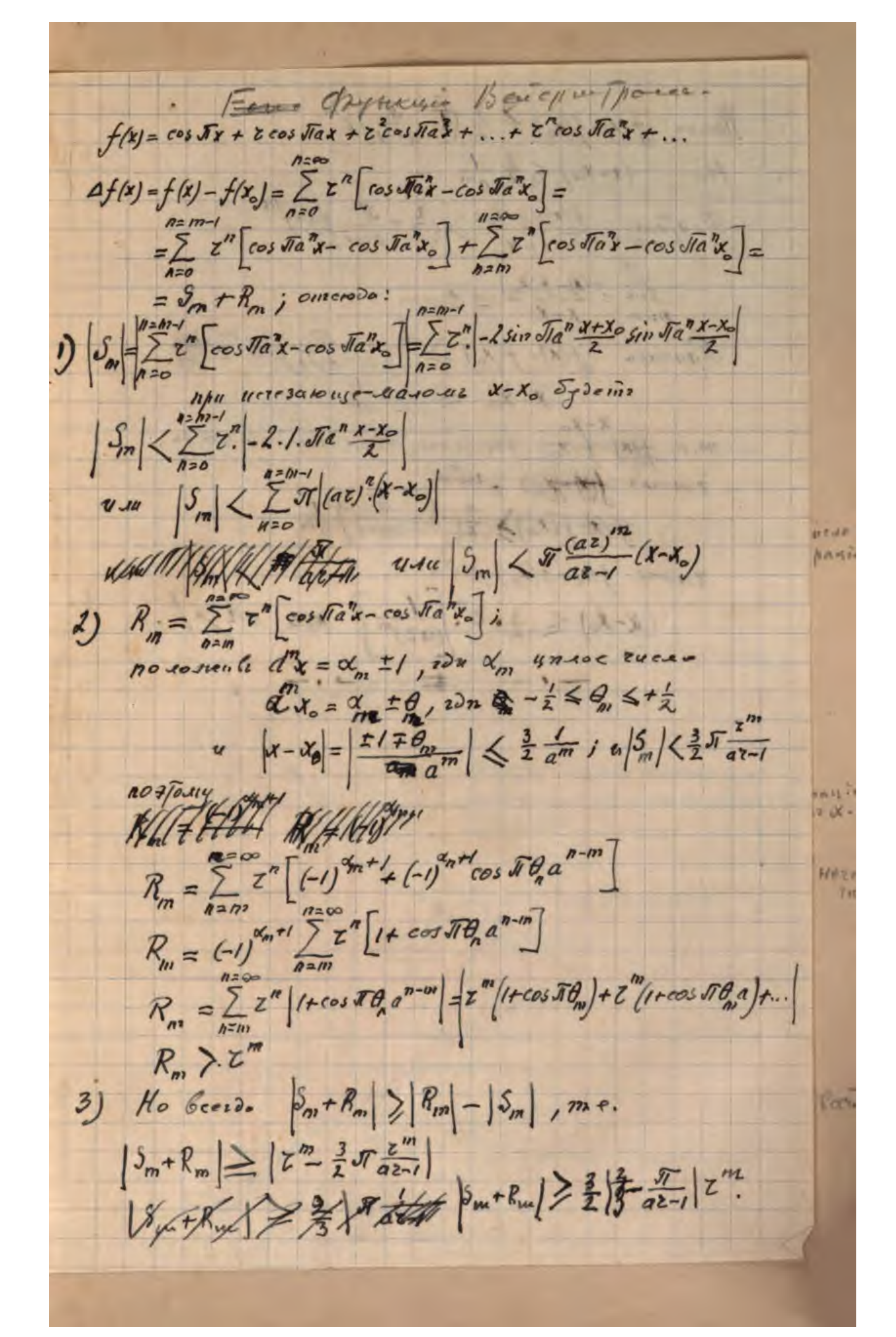
$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots;$$

la somme $f(x)$ de la série est donc continue pour toute valeur de la variable (p. 65).

La fonction ainsi définie, imaginée par Weierstrass ([1]), présente la particularité remarquable de ne pas être dérivable dans tout intervalle. En effet, pour deux valeurs x et x_0 de la variable, on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n \frac{\cos\pi a^n x - \cos\pi a^n x_0}{x - x_0}.$$

([1]) *Mathematische Werke*, t. II, p. 71-74 et 228-230.



Функция Вейерштрасса.

$$f(x) = \cos \pi x + \tau \cos \pi a x + \tau^2 \cos \pi a^2 x + \ldots + \tau^n \cos \pi a^n x + \ldots$$

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \tau^n \left[\cos \pi a^n x - \cos \pi a^n x_0\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{n=m-1} \tau^n \left[\cos \pi a^n x - \cos \pi a^n x_0\right] + \sum_{n=m}^{n=\infty} \tau^n \left[\cos \pi a^n x - \cos \pi a^n x_0\right] =$$

$= S_m + R_m$; отсюда:

1) $$|S_m| = \left|\sum_{n=0}^{n=m-1} \tau^n \left[\cos \pi a^n x - \cos \pi a^n x_0\right]\right| = \sum_{n=0}^{n=m-1} \tau^n \left|-2 \sin \pi a^n \frac{x+x_0}{2} \sin \pi a^n \frac{x-x_0}{2}\right|$$

при исчезающе-малом $x - x_0$ будет

$$|S_m| < \sum_{n=0}^{n=m-1} \tau^n \left|-2 \cdot 1 \cdot \pi a^n \frac{x-x_0}{2}\right|$$

или $$|S_m| < \sum_{n=0}^{n=m-1} \pi \left|(a\tau)^n (x-x_0)\right|$$

или $$|S_m| < \pi \frac{(a\tau)^m}{a\tau - 1}(x - x_0)$$

2) $$R_m = \sum_{n=m}^{n=\infty} \tau^n \left[\cos \pi a^n x - \cos \pi a^n x_0\right];$$

положив $a^m x = \alpha_m \pm 1$, где α_m целое число

$a^m x_0 = \alpha_m \pm \theta_m$, где $-\frac{1}{2} \leq \theta_m \leq +\frac{1}{2}$

и $$|x - x_0| = \left|\frac{\pm 1 \mp \theta_m}{a^m}\right| \leq \frac{3}{2}\frac{1}{a^m}\text{ ; и } |S_m| < \frac{3}{2}\pi \frac{\tau^m}{a\tau - 1}$$

поэтому

$$R_m = \sum_{n=m}^{n=\infty} \tau^n \left[(-1)^{\alpha_m+1} + (-1)^{\alpha_n+1} \cos \pi \theta_n a^{n-m}\right]$$

$$R_m = (-1)^{\alpha_m+1} \sum_{n=m}^{n=\infty} \tau^n \left[1 + \cos \pi \theta_n a^{n-m}\right]$$

$$R_m = \sum_{n=m}^{n=\infty} \tau^n \left|1 + \cos \pi \theta_n a^{n-m}\right| = \left|\tau^m (1 + \cos \pi \theta_m) + \tau^m (1 + \cos \pi \theta_m a) + \ldots\right|$$

$$R_m > \tau^m$$

3) Но всегда $|S_m + R_m| \geq |R_m| - |S_m|$, т.е.

$$|S_m + R_m| \geq \left|\tau^m - \frac{3}{2}\pi \frac{\tau^m}{a\tau - 1}\right|$$

$$|S_m + R_m| \geq \frac{3}{2}\left|\frac{2}{3} - \frac{\pi}{a\tau - 1}\right| \tau^m.$$

$-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; de là résulte

$$|R_m| > \frac{r^m}{|x-x_0|},$$

et, à plus forte raison,

$$|R_m| > \frac{2}{3}(ar)^m;$$

par conséquent, il suffit de prendre

$$ar \geqq 1 + \frac{3\pi}{2},$$

ce qui entraîne

$$\frac{2}{3} \geqq \frac{\pi}{ar-1},$$

pour que la valeur absolue de R_m soit supérieure à celle de S_m; on en conclut

$$|S_m + R_m| \geqq |R_m| - |S_m|,$$

d'où

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \geqq \left|\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ar-1}\right|(ar)^m.$$

Le second membre de cette inégalité croît indéfiniment avec m; d'ailleurs, le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a le même signe que R_m, c'est-à-dire le même signe que $(-1)^{\alpha_m+1}\varepsilon_m$, et, comme pour chaque valeur de m le signe de ε_m est arbitraire, on peut faire tendre ce rapport indifféremment vers $+\infty$ et $-\infty$. La fonction continue $f(x)$ n'a donc pas de dérivée si l'on suppose

$$ar \geqq 1 + \frac{3\pi}{2}.$$

La fonction de Weierstrass n'est pas la seule fonction continue qui jouisse de la bizarre propriété de n'être point dérivable dans tel ou tel cas [1]. Il existe beaucoup d'autres exemples analogues; Darboux en a cité plusieurs dans son *Mémoire sur les fonctions discontinues*.

---

[1] « Il y a cent ans, une pareille fonction eût été regardée comme un outrage au sens commun. » (H. Poincaré.) Cependant, d'après Baire, « c'est par exception qu'une fonction continue admet une dérivée ».

Fonctions circulaires inverses.

On représente par

$$\text{arc}\cos x,\quad \text{arc}\sin x,\quad \text{arc tang}\, x,\quad \text{arc}\cot x,\quad \text{arc séc}\, x,\quad \text{arc coséc}\, x$$

les fonctions inverses des fonctions circulaires et on les énonce en faisant précéder du mot *arc* le nom de la fonction circulaire correspondante. Nous définirons seulement les trois premières de ces fonctions; les autres ne sont pas employées.

Définition de arc cos$x$. — On désigne par *arc cos x* l'arc y dont le cosinus est x, c'est-à-dire la fonction y définie par la relation

$$x = \cos y,$$

la variable x ayant une valeur absolue au plus égale à l'unité.

Lorsque y varie de 0 à π, la fonction $\cos y$ varie de $+1$ à -1, et, comme elle est continue, elle passe par toutes les valeurs intermédiaires et, en particulier, par la valeur x (p. 19); de plus, elle n'y passe qu'une fois, puisqu'elle est constamment décroissante. Soit donc z l'arc unique, compris entre 0 et π, dont le cosinus est x; tous les arcs y, de cosinus égal à x, sont déterminés par la formule

$$y = 2k\pi \pm z;$$

si l'on donne à k une valeur entière fixe après avoir adopté l'un des deux signes $+$ ou $-$, quand x varie de -1 à $+1$, comme z est une fonction uniforme de cette variable, il en est de même de y; la fonction arc cos$x$ admet donc une infinité de déterminations uniformes que l'on obtient en donnant à k toutes les valeurs entières et en prenant chaque fois le signe $+$ ou le signe $-$; mais, dans la pratique, on ne considère que l'arc z, et c'est seulement cet arc que l'on représente par le symbole arc cos$x$.

Lorsqu'on trace les arcs de courbe correspondant aux déterminations de arc cos$x$, on constate facilement qu'ils se raccordent deux à deux en leurs extrémités. On peut donc regarder l'ensemble de ces arcs comme formant une courbe unique qui figure les diverses branches de la fonction.

Dérivée de arc cos$x$. — Si l'on applique la formule des accroissements finis à la fonction

$$x = \cos z,$$

on trouve

$$\Delta x = -\sin(z + \theta\,\Delta z)\Delta z, \qquad 0 < \theta < 1;$$

le coefficient de Δz n'est jamais nul en supposant x différent de ± 1; quand Δx tend vers zéro, il en est donc nécessairement de même de Δz; d'autre part, la fonction $\sin z$ est continue, par suite

$$z' = -\frac{1}{\sin z},$$

d'où

$$z' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

et alors

$$y' = \mp \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On prend le signe $-$ ou le signe $+$ suivant que y est égal à $2k\pi + z$ ou à $2k\pi - z$, c'est-à-dire, suivant que $\sin y$ est positif ou négatif.

Toutes les déterminations de arc cos$x$ ont donc des dérivées égales en valeur absolue.

Formule de Jacobi. — Soit

$$f(u) = (1-u)^{n-\frac{1}{2}};$$

la dérivée $p^{\text{ième}}$ a pour expression

$$f^{(p)}(u) = (-1)^p \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\cdots\left(n - \frac{2p-1}{2}\right)(1-u)^{n-\frac{2p+1}{2}};$$

mais, en posant $u = x^2$, on a (p. 93)

$$f^{(n-1)}(x^2) = (2x)^{n-1} f^{(n-1)}(u) + \frac{(n-1)(n-2)}{1}(2x)^{n-3} f^{(n-2)}(u) + \ldots,$$

par suite

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n}$$

$$\times\left[\frac{n}{1}x^{n-1}\sqrt{1-x^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}(\sqrt{1-x^2})^3 + \ldots\right]$$

or, si l'on fait

$$x = \cos\theta,$$

on en déduit (p. 160)

$$\sin(n \operatorname{arc}\cos x) = \frac{n}{1}\cos^{n-1}\theta \sin\theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\theta \sin^3\theta + \ldots,$$

donc

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\sin(n \operatorname{arc}\cos x);$$

cette formule curieuse, analogue à celle d'Olinde Rodrigues (p. 83), est due à Jacobi (¹).

Définition de arc sin$x$. — On désigne par *arc sin$x$* l'arc y dont le sinus est x, c'est-à-dire la fonction y définie par la relation

$$x = \sin y,$$

la variable x ayant une valeur absolue au plus égale à l'unité.

Lorsque y varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, la fonction $\sin y$ varie de -1 à $+1$, et, comme elle est continue, elle passe par toutes les valeurs intermédiaires et, en particulier, par la valeur x (p. 19); de plus, elle n'y passe qu'une fois, puisqu'elle est constamment croissante. Soit donc z l'arc unique, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, dont le sinus est x; tous les arcs y, de sinus égal à x, sont déterminés par les formules

$$y = 2k\pi + z, \qquad y = (2k+1)\pi - z,$$

formules que l'on peut réunir en une seule

$$y = n\pi + (-1)^n z;$$

si l'on donne à n une valeur entière fixe, quand x varie de -1 à $+1$, comme z est une fonction uniforme de cette variable, il en est de même de y; la fonction arc sin$x$ admet donc une infinité de déterminations uniformes que l'on obtient en donnant à n toutes les valeurs entières; mais, dans la pratique, on ne considère

(¹) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XV, 1836, p. 3-4.

que l'arc z, et c'est seulement cet arc que l'on représente par $\operatorname{arc}\sin x$.

Les arcs de courbe relatifs aux déterminations multiples de $\operatorname{arc}\sin x$ constituent, comme pour la fonction $\operatorname{arc}\cos x$, une courbe unique.

Dérivée de arc sin*x*. — La formule des accroissements finis appliquée à la fonction

$$x = \sin z$$

donne

$$\Delta x = \cos(z + \theta\,\Delta z)\,\Delta z;$$

le coefficient de Δz n'est jamais nul, si l'on suppose x différent de ± 1; quand Δx tend vers zéro, il en est donc certainement de même de Δz; d'autre part, la fonction $\cos z$ est continue, par suite

$$z' = \frac{1}{\cos z},$$

d'où

$$z' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

et alors

$$y' = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

On prend le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que y est égal à $2k\pi + z$ ou à $(2k+1)\pi - z$, c'est-à-dire suivant que $\cos y$ est positif ou négatif.

Toutes les déterminations de $\operatorname{arc}\sin x$ ont donc des dérivées égales en valeur absolue.

Les dérivées de $\operatorname{arc}\cos x$ et de $\operatorname{arc}\sin x$ sont égales en valeur absolue; il est facile de le vérifier directement; en effet, si l'on pose

$$u = \operatorname{arc}\cos x, \qquad v = \operatorname{arc}\sin x,$$

on a, pour une même valeur de x,

$$\cos u = \sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right),$$

d'où

$$u = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - v\right),$$

et, par suite,

$$u' = \mp v'.$$

Développement de arc sin x en série entière. — Si l'on suppose que arc sin x représente l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est x, la dérivée de cette fonction a pour expression

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

elle peut se développer suivant la série entière

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots, \qquad -1 < x < 1;$$

comme $f(0)$ est nul, on a donc

$$\text{arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \ldots, \qquad -1 \leqq x \leqq 1 \text{ (1)};$$

l'application de la règle de Raabe, ou de celle de Gauss, montre que, pour $x = \pm 1$, cette série est convergente; d'après le théorème d'Abel, la limite de arc sin x pour $x = 1$, par exemple, est égale à la somme de la série pour $x = 1$, par suite

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\frac{1.3}{2.4} + \frac{1}{7}\frac{1.3.5}{2.4.6} + \ldots.$$

Si, dans le développement de arc sin x, on remplace x par sin x, on trouve le nouveau développement

$$x = \frac{\sin x}{1} + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5 x}{5} + \ldots, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Développement de cos(n arc sin x) et de sin(n arc sin x) en séries entières. — Soit

$$y = \cos(n \,\text{arc}\sin x),$$

le symbole arc sin x représentant l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est x; on a

$$y = 1 - \frac{n^2}{1.2}(\text{arc}\sin x)^2 + \frac{n^4}{1.2.3.4}(\text{arc}\sin x)^4 - \ldots,$$

(1) Ce développement a été considéré pour la première fois par Newton dans son *Analysis per aequationes*... (*Isaaci Newtoni*... *opuscula mathematica*. éd. Castillon, t. I, p. 22-23).

et cette série est absolument convergente pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle $(-1, +1)$, y compris -1 et $+1$; pour ces mêmes valeurs, $\arcsin x$ est développable en série entière convergente, et, comme il en est de même, d'après la règle de multiplication des séries, de ses puissances paires successives, on peut poser

$$(\arcsin x)^{2k} = x^{2k} + a_2 x^{2k+2} + a_4 x^{2k+4} + \ldots,$$

les coefficients numériques a_2, a_4, ... étant tous positifs. Les valeurs absolues des termes de la série y sont donc développables en séries entières positives convergentes; la série positive constituée par leurs sommes est aussi convergente, par suite la fonction y est elle-même développable en une série entière convergente (p. 96) qui est nécessairement de la forme

$$y = 1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_4 x^4 + \lambda_6 x^6 + \ldots, \qquad -1 \leqq x \leqq 1;$$

d'ailleurs

$$\lambda_2 = \frac{y''_0}{1.2}, \qquad \lambda_4 = \frac{y_0^{\text{IV}}}{1.2.3.4}, \qquad \ldots, \qquad \lambda_{2p} = \frac{y_0^{(2p)}}{1.2\ldots 2p}, \qquad \ldots.$$

Or, il est facile de constater que la fonction y vérifie l'équation différentielle

$$(1 - x^2) y'' - x y' + n^2 y = 0,$$

d'où, en dérivant p fois,

$$(1 - x^2) y^{(p+2)} - (2p + 1) x y^{(p+1)} - (p^2 - n^2) y^{(p)} = 0;$$

pour $x = 0$, on trouve

$$y_0^{(p+2)} = (p^2 - n^2) y_0^{(p)};$$

ainsi les dérivées impaires de y, pour $x = 0$, sont nulles; quant aux dérivées paires, elles sont données par la formule

$$y_0^{(p+2)} = (-1)^{\frac{p}{2}+1} n^2 (n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)\ldots(n^2 - p^2),$$

par conséquent

$$\cos(n \arcsin x) = 1 - \frac{n^2}{1.2} x^2 + \frac{n^2(n^2 - 2^2)}{1.2.3.4} x^4 - \frac{n^2(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{1.2.3.4.5.6} x^6 + \ldots, \qquad -1 \leqq x \leqq 1.$$

On obtiendrait de même

$$\sin(n \operatorname{arc} \sin x) = \frac{n}{1} x - \frac{n(n^2-1^2)}{1.2.3} x^3 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5} x^5 - \ldots, \qquad -1 \leqq x \leqq 1.$$

Ces formules ont été trouvées par Jacques Bernoulli (¹); si dans l'une et l'autre on remplace x par $\sin x$, on voit que, pour toute valeur de n, on a

$$\cos nx = 1 - \frac{n^2}{1.2} \sin^2 x + \frac{n^2(n^2-2^2)}{1.2.3.4} \sin^4 x - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6} \sin^6 x + \ldots, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},$$

$$\sin nx = \frac{n}{1} \sin x - \frac{n(n^2-1^2)}{1.2.3} \sin^3 x + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x - \ldots, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Définition de arc tang$x$. — On désigne par *arc tang* x l'arc y dont la tangente est x, c'est-à-dire la fonction y définie par la relation

$$x = \operatorname{tang} y.$$

Lorsque y varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, la fonction tang$y$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, et, comme elle est continue, elle passe par toutes les valeurs intermédiaires et, en particulier, par la valeur x; de plus, elle n'y passe qu'une fois, puisqu'elle est constamment croissante. Soit donc z l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ dont la tangente est x; tous les arcs y, de tangente égale à x, sont déterminés par la formule

$$y = k\pi + z;$$

si l'on donne à k une valeur entière fixe, quand x varie de $-\infty$

(¹) *Histoire de l'Académie royale des Sciences*, 1702, p. 285. Le second des développements avait été indiqué déjà par Newton dans sa première lettre à Oldenburg du 13 juin 1676 (*Isaaci Newtoni... opuscula mathematica*, éd. Castillon, t. I, p. 315).

à $+\infty$, comme z est une fonction uniforme de cette variable, il en est de même de y; la fonction arc tang$x$ admet donc une infinité de déterminations uniformes que l'on obtient en donnant à k toutes les valeurs entières.

Il y a lieu, dans ce cas encore, de considérer les courbes parallèles représentant les branches de arc tang$x$ comme les éléments d'une courbe unique.

Dérivée de arc tang$x$. — Si l'on applique la formule des accroissements finis à la fonction

$$x = \operatorname{tang} z,$$

on trouve

$$\Delta x = \frac{\Delta z}{\cos^2(z + \theta\,\Delta z)};$$

le coefficient de Δz n'est pas nul et il n'est jamais infini si l'on suppose x fini; quand Δx tend vers zéro, il en est donc nécessairement de même de Δz; d'autre part, la fonction $\cos z$ est continue, par suite

$$z' = \cos^2 z = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 z},$$

c'est-à-dire

$$z' = \frac{1}{1 + x^2},$$

d'où

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Toutes les déterminations de arc tang$x$ ont donc la même dérivée.

Développement de arc tang$x$ en série entière. — La dérivée de arc tang$x$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

est développable suivant la série entière

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots;$$

comme $f(0)$ est nul, on a donc

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \qquad -1 \leqq x \leqq 1;$$

cette série est due à Gregory (¹); pour $x = \pm 1$, elle reste convergente. Or, d'après le théorème d'Abel, pour $x = 1$, par exemple, la limite de arc tang$x$ est égale à la somme de la série pour $x = 1$; par suite,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots,$$

développement dû également à Gregory; sa convergence est extrêmement lente (²); mais, comme nous allons le voir, on peut le transformer de manière à rendre sa convergence beaucoup plus rapide.

Calcul de π. — Soit x une fraction assez petite pour que l'arc u, dont la tangente est x, puisse facilement se calculer au moyen de son développement en série; si l'on considère les multiples de u, on finira par en trouver un assez grand mu pour que sa tangente soit voisine de l'unité, c'est-à-dire, pour que l'arc v égal à $mu - \frac{\pi}{4}$ diffère très peu de zéro; la tangente trigonométrique y de cet arc est donnée par la formule

$$y = \frac{\operatorname{tang} mu - 1}{\operatorname{tang} mu + 1};$$

et alors, comme

$$\frac{\pi}{4} = mu - v,$$

on en déduit

$$\frac{\pi}{4} = m \operatorname{arc\,tang} x - \operatorname{arc\,tang} y.$$

Ainsi, pour $x = \frac{1}{5}$, on voit que la tangente de $4u$ est $\frac{120}{119}$, fraction très voisine de l'unité, de sorte que, si l'on fait $m = 4$, on

(¹) Lettre de Gregory à Collins du 15 février 1671 (*Commercium epistolicum*..., éd. J.-B. Biot et F. Lefort, p. 79-80).

(²) Newton, dans une lettre en date du 24 octobre 1676 adressée à Leibniz par l'intermédiaire d'Oldenburg, indique que, pour obtenir $\frac{\pi}{4}$ au moyen de cette série avec vingt décimales, il faudrait prendre cinq milliards de termes et mettre mille ans à ce calcul (*Isaaci Newtoni... opuscula mathematica*, éd. Castillon, t. I, p. 343).

obtient $\frac{1}{239}$ pour y; par suite,

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{239},$$

ou bien

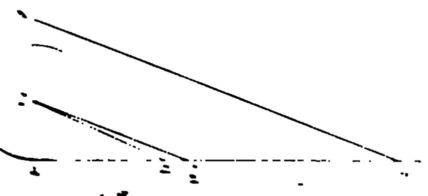
$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{5^5} - \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{239^5} - \ldots\right);$$

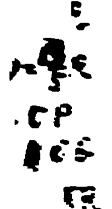
cette formule, trouvée par l'astronome anglais John Machin (¹), permet d'évaluer très rapidement le nombre π avec une grande approximation. W. Schanks, en l'employant, est parvenu à calculer π avec 707 décimales exactes (²); c'est la valeur la plus approchée que l'on connaisse; en se limitant aux vingt premières décimales, on a

$$\pi = 3,14159265358979323846\ldots$$

Application. Rectification approchée de la circonférence. — La rectification approchée de la circonférence, c'est-à-dire la construction géométrique d'une droite de longueur sensiblement égale à celle de la circonférence, peut être obtenue par divers procédés. Le plus simple est le suivant, qui a été proposé par Specht (³).

Soit O le centre d'une circonférence de rayon R; sur une tangente en A à cette circonférence, on prend des longueurs AP, PQ





respectivement égales, la première [illegible] cinquième du rayon, et la seconde [illegible]

(¹) Elle fut publiée sans démonstration [illegible] Mathematics de William Jones [illegible]

(²) Proceedings [illegible]

(³) Journal [illegible]

puis, par un point N du diamètre OA, distant de A d'une longueur égale à OP, on mène une parallèle NM à OQ; elle rencontre la tangente AP en M. Le segment AM représente approximativement la longueur de la circonférence. En effet,

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AQ}{AO} = \frac{13}{5},$$

mais

$$OP = R\sqrt{1+\left(\frac{11}{5}\right)^2} = \frac{R}{5}\sqrt{146},$$

par suite

$$AM = 2R.\frac{13}{50}\sqrt{146},$$

c'est-à-dire

$$AM = 2R.3,141591953\ldots.$$

L'erreur commise en considérant AM comme égal à $2\pi R$ est légèrement supérieure à $0,0000007.2R$; pour une circonférence de rayon égal à celui de la Terre, elle n'atteindrait pas dix mètres.

Sommation de deux séries trigonométriques. — I. — Soit

$$\operatorname{tang} y = \frac{x \sin\theta}{1 - x\cos\theta};$$

on se propose de développer y suivant une série entière en x. La dérivée de y par rapport à x est

$$y' = \frac{\sin\theta}{(1 - x\cos\theta)^2}\cos^2 y,$$

ou, en remplaçant $\cos^2 y$ par sa valeur en fonction de x,

$$y' = \frac{\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2},$$

par suite, y' est développable, à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$, suivant la série entière (p. 177)

$$y' = \sin\theta + x\sin 2\theta + x^2 \sin 3\theta + \ldots;$$

comme y_0 est nul, on a donc, quel que soit θ,

$$y = \frac{x}{1}\sin\theta + \frac{x^2}{2}\sin 2\theta + \frac{x^3}{3}\sin 3\theta + \ldots, \qquad -1 < x < 1;$$

ce développement subsiste pour $x = 1$ (p. 175).

La série précédente a été donnée par Lagrange dans les Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin (¹).

II. — Soit

$$\operatorname{tang} y = m \operatorname{tang} x;$$

il s'agit de développer y suivant une série entière en x. Or

$$\operatorname{tang}(y-x) = \frac{\operatorname{tang} y - \operatorname{tang} x}{1 + \operatorname{tang} y \operatorname{tang} x} = \frac{(m-1)\operatorname{tang} x}{1 + m \operatorname{tang}^2 x},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}(y-x) = \frac{(m-1)\sin x \cos x}{\cos^2 x + m \sin^2 x} = \frac{(m-1)\sin 2x}{(m+1)-(m-1)\cos 2x},$$

ou encore

$$\operatorname{tang}(y-x) = \frac{\frac{m-1}{m+1}\sin 2x}{1 - \frac{m-1}{m+1}\cos 2x},$$

par suite

$$y = x + \frac{1}{1}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)\sin 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 \sin 4x + \frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3 \sin 6x + \ldots,$$

$$m > 0.$$

Fonctions hyperboliques.

Les *fonctions hyperboliques* sont des fonctions qui, par leur définition et leurs propriétés, offrent une grande analogie avec les fonctions circulaires. On les représente par les symboles

$$\operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{th} x, \quad \operatorname{coth} x, \quad \operatorname{séch} x, \quad \operatorname{coséch} x,$$

qui s'énoncent : *cosinus hyperbolique x, sinus hyperbolique x*, et ainsi de suite; la variable x s'appelle l'*argument x*. Les deux premières de ces fonctions peuvent se définir par des séries entières; les autres s'expriment en fonction de ch$x$ et de sh$x$ au

(¹) *Œuvres*, t. V, p. 293.

moyen des relations

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \qquad \operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},$$

$$\operatorname{séch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \qquad \operatorname{coséch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

Nous ne considérerons que les fonctions ch$x$ et sh$x$.

Les fonctions hyperboliques ont été découvertes au XVIII[e] siècle par le Père Jésuite Riccati (1); depuis, de nombreux analystes en ont fait usage ou se sont attachés à mettre en évidence leurs diverses propriétés. On peut consulter, pour une étude approfondie de ces fonctions, la Monographie de Laisant (2), ou le Traité très complet de Günther (3).

Définition de ch$x$ et de sh$x$. — On désigne par ch$x$ et sh$x$ les sommes des séries entières

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots, \quad = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} + \ldots, \quad = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

dont le rayon de convergence est infini; ces séries définissent ch$x$ comme *fonction paire de x*, et sh$x$ comme *fonction impaire de x*; par suite,

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x.$$

Dérivées de ch$x$ et de sh$x$. — Si l'on pose

$$u = \operatorname{ch} x, \qquad v = \operatorname{sh} x,$$

en dérivant, on trouve

$$u' = \operatorname{sh} x, \qquad u'' = \operatorname{ch} x,$$
$$v' = \operatorname{ch} x, \qquad v'' = \operatorname{sh} x;$$

(1) *Opuscula ad res physicas et mathematicas pertinentia*, Bononiæ, 1757, t. I, p. 45-94.

(2) *Essai sur les fonctions hyperboliques* dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. X, 1875, p. 233-328.

(3) *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen.*

les dérivées successives de $\operatorname{ch} x$ et de $\operatorname{sh} x$ se reproduisent donc de deux en deux.

Formules d'addition de $\operatorname{ch} x$ et de $\operatorname{sh} x$. — On a, quels que soient x et h,

$$\operatorname{ch}(x+h) = \operatorname{ch} x + \frac{h}{1}\operatorname{sh} x + \frac{h^2}{1.2}\operatorname{ch} x + \frac{h^3}{1.2.3}\operatorname{sh} x + \frac{h^4}{1.2.3.4}\operatorname{ch} x + \ldots,$$

$$\operatorname{sh}(x+h) = \operatorname{sh} x + \frac{h}{1}\operatorname{ch} x + \frac{h^2}{1.2}\operatorname{sh} x + \frac{h^3}{1.2.3}\operatorname{ch} x + \frac{h^4}{1.2.3.4}\operatorname{sh} x + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{ch}(x+h) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} h + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} h,$$
$$\operatorname{sh}(x+h) = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} h + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} h;$$

ce sont les *formules d'addition* des fonctions $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$. On peut les vérifier en appliquant le théorème de la multiplication des séries.

Relation fondamentale. — La première des formules d'addition donne, pour $h = -x$,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

cette relation, dite *relation fondamentale*, permet d'exprimer $\operatorname{ch} x$ en fonction de $\operatorname{sh} x$ et inversement.

Application. Dérivée de $\operatorname{th} x$. — Soit

$$y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x};$$

on a

$$y' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x},$$

la dérivée de $\operatorname{th} x$ est donc

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Expression de $\operatorname{ch} x$ et de $\operatorname{sh} x$ en fonction d'exponentielles. — On a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots,$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots,$$

par suite

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

ces formules importantes peuvent servir à définir $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ et à démontrer leurs propriétés.

Limite du rapport $\frac{\operatorname{sh} x}{x}$ pour $x = 0$. — Si l'on considère la série entière

$$1 + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \ldots + \frac{x^{2n}}{1.2\ldots(2n+1)} + \ldots,$$

dont le rayon de convergence est infini, pour $x = 0$ sa somme se réduit à l'unité; il en résulte, d'après le théorème d'Abel, que le rapport

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x}$$

a pour limite l'unité lorsque x tend vers zéro.

Variations de ch$x$ et de sh$x$. — Les relations

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right), \qquad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)$$

montrent que $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ varient conformément aux indications du tableau suivant :

x........	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{ch} x$......	$+\infty$	décroît	1	croît	$+\infty$
$\operatorname{sh} x$......	$-\infty$	croît	0	croît	$+\infty$

Amplitude hyperbolique. — On peut poser, d'après les variations de $\operatorname{ch} x$,

$$\cos\varphi = \frac{1}{\operatorname{ch} x},$$

l'angle φ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et de même signe que x; toutes les fonctions hyperboliques s'expriment alors en fonction de φ au moyen des relations

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{séc}\varphi, \qquad \operatorname{sh} x = \operatorname{tang}\varphi, \qquad \operatorname{th} x = \sin\varphi,$$
$$\operatorname{séch} x = \cos\varphi, \qquad \operatorname{coséch} x = \cot\varphi, \qquad \operatorname{coth} x = \operatorname{coséc}\varphi.$$

formules qui ramènent l'étude des fonctions hyperboliques à celle des fonctions circulaires.

L'angle φ a été appelé par Houël l'*amplitude hyperbolique* de l'argument x; on le représente quelquefois par $amh\,x$, notation d'ailleurs peu justifiée.

Si, dans la relation

$$e^x = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x,$$

on remplace $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ par leurs expressions en fonction de φ, on trouve

$$e^x = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

par suite

$$x = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

formule qui donne l'argument en fonction de l'amplitude.

Représentation géométrique de ch$x$ et de sh$x$. — Si l'on pose

$$X = \operatorname{ch} x, \qquad Y = \operatorname{sh} x,$$

on a

$$X^2 - Y^2 = 1,$$

par conséquent, le point $M(X, Y)$ décrit, quand x varie, une hyperbole équilatère de centre à l'origine et de demi-axe transverse égal à l'unité.

Fonctions hyperboliques inverses. — On désigne les fonctions inverses des fonctions hyperboliques par les notations

$$\operatorname{arg} \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{arg} \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{arg} \operatorname{th} x, \quad \operatorname{arg} \operatorname{coth} x, \quad \operatorname{arg} \operatorname{séch} x, \quad \operatorname{arg} \operatorname{coséch} x,$$

qui s'énoncent en faisant précéder du mot *argument* le nom de la fonction hyperbolique correspondante. Nous ne définirons que les trois premières de ces fonctions, qui sont seules usitées.

Définition de arg ch$x$. — On représente par *arg ch$x$* l'argument y dont le cosinus hyperbolique est x, c'est-à-dire la fonction y définie par la relation

$$x = \operatorname{ch} y,$$

ou bien

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2},$$

d'où

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0;$$

on tire de cette équation

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

et, par suite,

$$y = \pm \log(x + \sqrt{x^2 - 1});$$

cette fonction n'est réelle que pour les valeurs de x non inférieures à l'unité; sa dérivée a pour expression

$$y' = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Définition de arg sh x. — On désigne par *arg sh x* l'argument y dont le sinus hyperbolique est x, c'est-à-dire la fonction y définie par la relation

$$x = \text{sh}\, y,$$

ou bien

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

d'où

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0;$$

cette équation donne, en observant que e^y doit être positif,

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1},$$

et, par suite,

$$y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

la dérivée de cette fonction a pour expression

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Définition de arg th x. — On représente par *arg th x* l'argument y dont la tangente hyperbolique est x, c'est-à-dire la fonction y définie par la relation

$$x = \text{th}\, y,$$

ou bien

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}},$$

d'où

$$y = \log\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}};$$

cette fonction n'est réelle que pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle $(-1, +1)$; sa dérivée a pour expression

$$y' = \frac{1}{1-x^2}.$$

EXERCICES.

1° Trouver la limite du produit

$$\cos x \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2^2} \cdots \cos\frac{x}{2^n},$$

lorsque n augmente indéfiniment.

VIÈTE.

2° Sommer la série

$$\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{x}{2^3} + \cdots.$$

EULER.

3° Démontrer la formule

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \frac{2n-2m}{2n-m}\,\frac{2n+2m}{2n+m}\,\frac{4n-2m}{4n-m}\,\frac{4n+2m}{4n+m}\cdots.$$

STERN.

4° Étudier la série

$$\varpi(x) = \frac{B_1}{1.2}\,\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\,\frac{1}{x^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2n}\,\frac{1}{x^{2n-1}} + \cdots,$$

$= \lg \varphi(x) =$ où $\varphi(x) = \dfrac{1.2.3\ldots x}{\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}}$

où $B_1, B_2, \ldots, B_n$ désignent les nombres de Bernoulli.

5° Faire voir que B_2 et B_3 sont les deux seuls nombres de Bernoulli qui soient égaux. Démontrer que l'inégalité

$$B_n > \frac{2n-1}{4}$$

est vérifiée à partir de $n = 8$.

STERN.

6° Établir le développement

$$\frac{1}{\cos x} = 1 - \frac{1}{\pi}\,\frac{4x^2}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}} + \frac{1}{3\pi}\,\frac{4x^2}{x^2 - 9\frac{\pi^2}{4}} - \frac{1}{5\pi}\,\frac{4x^2}{x^2 - 25\frac{\pi^2}{4}} + \cdots.$$

ED. WEYR.

7° Développer arc tang$(x+h)$ suivant les puissances entières croissantes de h.

EULER.

8° Étant donnée la relation

$$\sin(x-y) = m \sin(x+y),$$

dans laquelle m désigne un nombre déterminé de valeur absolue inférieure à l'unité, développer y suivant une série entière en m et indiquer la forme du reste lorsqu'on ne prend qu'un nombre limité de termes.

ROUCHÉ.

9° Vérifier l'égalité

$$\operatorname{th}\frac{x}{2} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2},$$

l'angle φ étant l'amplitude hyperbolique de l'argument x.

LAISANT.

10° Soient a et b deux nombres positifs; on fait

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad b_1 = \sqrt{a_1 b},$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \qquad b_2 = \sqrt{a_2 b_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

démontrer que la limite de la suite infinie

$$a, \quad b, \quad a_1, \quad b_1, \quad a_2, \quad b_2, \quad \ldots,$$

dite *suite de Schwab*, est

$$b\frac{\sin x}{x}, \qquad \text{ou} \qquad b\frac{\operatorname{sh} x}{x},$$

en posant, suivant que a est inférieur ou supérieur à b,

$$a = b\cos x, \qquad \text{ou} \qquad a = b \operatorname{ch} x.$$

BORCHARDT.

BIBLIOGRAPHIE.

BERTRAND (J.), Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral. Paris, Gauthier-Villars, 1864, in-4°, t. I, p. 296-307 et p. 413-429.

GÜNTHER (Siegm.), Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen. Halle, Nebert, 1881, in-8°.

LAISANT, Essai sur les fonctions hyperboliques (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. X, 1875, p. 233-328).

REIFF (Dr. R.), Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen, Laupp, 1889, in-8°.

SERRET (J.-A.), Traité de Trigonométrie, 8e éd. Paris, Gauthier-Villars, 1900, in-8°.

TANNERY (Jules), Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Paris, Hermann, 1886, in-8°, p. 145-216.

VI.

FONCTION GAMMA.

Soit

$$\Pi(x) = n^x \frac{1.2.3\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n)};$$

il est facile d'établir que, pour toute valeur de x non égale à zéro ou à un entier négatif, cette expression tend vers une limite quand n augmente indéfiniment. En effet, de l'identité

$$n = \frac{2.3\ldots\ n}{1.2\ldots(n-1)}$$

on tire immédiatement

$$n^x = \left(1+\frac{1}{1}\right)^x \left(1+\frac{1}{2}\right)^x \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x,$$

de sorte que le produit $\Pi(x)$ peut être mis sous la forme

$$\Pi(x) = \frac{1}{x} \frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x \left(1+\frac{1}{2}\right)^x \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}.$$

lim Π(x) = Γ(x

Si l'on suppose d'abord la variable positive, en prenant les logarithmes, on trouve que le logarithme du produit $x\Pi(x)$ est égal à

$$\sum_{p=1}^{p=n}\left[\frac{x}{p} - \log\left(1+\frac{x}{p}\right)\right] - x\sum_{p=1}^{p=n}\left[\frac{1}{p} - \log\left(1+\frac{1}{p}\right)\right] - x\log\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

expression dans laquelle la seconde somme se déduit de la première en faisant dans celle-ci $x=1$. Mais, d'après la formule

$\Gamma(x) = \lim \frac{n^x}{x} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}$

des accroissements finis, on a

$$\frac{x}{n} - \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{\theta x^2}{n(n+\theta x)},$$

d'où

$$\frac{x}{n} - \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) < \frac{x^2}{n^2}.$$

Ainsi la série

$$\left[\frac{x}{1} - \log\left(1 + \frac{x}{1}\right)\right] + \left[\frac{x}{2} - \log\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right] + \ldots$$

est absolument et uniformément convergente pour toute valeur positive de x. En particulier, pour $x = 1$, la série positive

$$\left[\frac{1}{1} - \log\left(1 + \frac{1}{1}\right)\right] + \left[\frac{1}{2} - \log\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right] + \ldots$$

est convergente; sa somme est la *constante d'Euler* (p. 143). On en conclut que $\Pi(x)$ a une limite pour $n = \infty$. Il en est encore de même si l'on suppose x négatif, mais non entier; en effet, soit m un entier supérieur à $-x$, en désignant par y le nombre positif $x + m$, on constate sans peine que $\Pi(x)$ est égal au produit de l'expression

$$\left(\frac{n}{n-m}\right)^y \frac{\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\left(1 - \frac{m-2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)},$$

qui a une limite pour $n = \infty$, par l'expression

$$(n-m)^y \frac{1.2\ldots(n-m)}{y(y+1)\ldots(y+n-m)},$$

Γ(x) = lim (Π(x))

qui, d'après ce que l'on vient de voir, tend aussi vers une limite quand n croît indéfiniment.

Il résulte de ce qui précède que le produit $\Pi(x)$, pour toute valeur de x autre que zéro ou qu'un entier négatif, a une limite lorsque n devient infini. Cette limite est une fonction transcendante de x à laquelle on donne le nom de *fonction gamma*; on la désigne, en effet, par le symbole $\Gamma(x)$ employé pour la pre-

mière fois par Legendre ([1]), et unanimement conservé depuis. Cette définition, à la fois naturelle et générale, est due à Euler ([2]); mais c'est Gauss qui signala son importance ([3]) et montra qu'on peut en déduire, avec une rare facilité, les propriétés de la fonction gamma ([4]).

Weierstrass ([5]), dans son Mémoire sur les *facultés analytiques*, a donné le nom de *factorielle de* x à l'inverse de $\Gamma(x)$, et il a mis cette fonction, qu'il représente par $\mathrm{Fc}(x)$, sous une forme que nous allons faire connaître.

Si l'on considère l'égalité

$$\frac{1}{\Pi(x)} = \frac{1}{n^x}\,\frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{1.2\ldots n},$$

on en déduit

$$\frac{1}{\Pi(x)} = x\left(1+\frac{x}{n}\right)\left[\frac{x+1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]\left[\frac{x+2}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]\cdots\left[\frac{x+n-1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right],$$

et, pour $n=\infty$, on obtient

$$\mathrm{Fc}(x) = x\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^x;$$

telle est l'expression d'où Weierstrass a tiré toutes les propriétés de $\mathrm{Fc}(x)$.

Formule de Weierstrass. — On a

$$\frac{1}{\Pi(x)} = \frac{1}{n^x}\,\frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{1.2\ldots n},$$

ou bien, s_n désignant la somme des n premiers termes de la série

---

([1]) *Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, 1809, p. 477.

([2]) Dès 1729, dans une lettre adressée à Goldbach, Euler avait considéré le produit $\Pi(x)$, à propos de l'interpolation de la série $1+1.2+1.2.3+\ldots$ (*Voir:* P.-H. Fuss, *Correspondance mathématique et physique*, t. I, p. 3-4.)

([3]) Lettre à Bessel en date du 21 novembre 1811 (*Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*, p. 152).

([4]) *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\ldots$ (*Carl Friedrich Gauss Werke*, t. III, p. 144-162).

([5]) *Mathematische Werke*, t. I, p. 161.

harmonique,

$$\frac{1}{\Pi(x)} = x\left(\frac{e^{s_n}}{n}\right)^x \left[\left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-\frac{x}{1}}\right]\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\right]\cdots\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right].$$

Soit

$$\lambda_n = \frac{e^{s_n}}{n};$$

en prenant les logarithmes, on trouve

$$\log\lambda_n = s_n - \log n;$$

quand n croît indéfiniment, la limite du second membre de cette égalité est la constante d'Euler C, par suite

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{Cx}\left[\left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-\frac{x}{1}}\right]\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\right]\cdots\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right]\cdots.$$

La relation précédente, qui peut servir à définir la fonction gamma, donne la décomposition de son inverse en *facteurs primaires*. Elle a été signalée par Weierstrass (¹) dans son Mémoire sur la théorie des fonctions uniformes.

Si l'on considère la formule

$$\sin\pi x = \pi x \prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} \prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}},$$

on constate que la fonction $\Gamma(x)$ est formée avec la moitié des facteurs qui constituent la fonction simplement périodique $\sin\pi x$. Ce fait a conduit à imaginer des fonctions formées avec la moitié, ou même le quart, des facteurs qui constituent certaines fonctions doublement périodiques. Telles sont les fonctions de Heine (²) et la fonction gamma double de Barnes (³).

(¹) *Mathematische Werke*, t. II, p. 91. Cependant cette formule avait été déjà rencontrée par Newman (*The Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. III, 1848, p. 59).

(²) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XXXIV, 1847, p. 309-315. — *Handbuch der Kugelfunctionen*, 2ᵉ éd., t. I, p. 109-115.

(³) *Proceedings of the London mathematical Society*, t. XXXI, 1899, p. 358-381. — *The quarterly Journal of pure and applied Mathematics*, t. XXXI, 1900, p. 264-314.

Relation fonctionnelle. — On a

$$\Pi(x+1) = n^{x+1}\frac{1.2.3\ldots n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)} = \frac{nx}{n+x+1}\Pi(x),$$

d'où, pour $n=\infty$,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

c'est cette relation que l'on nomme *relation fonctionnelle*. Elle ne caractérise pas d'ailleurs la fonction gamma, car elle est vérifiée par toute fonction de la forme

$$y = \Gamma(x)\Theta(x),$$

la fonction $\Theta(x)$ satisfaisant elle-même à l'égalité

$$\Theta(x+1) = \Theta(x),$$

c'est-à-dire admettant une période égale à l'unité, ce qui est le cas de toutes les fonctions développables en séries trigonométriques convergentes telles que

$$\Theta(x) = a_0 + a_1\cos 2\pi x + a_2\cos 4\pi x + \ldots + b_1\sin 2\pi x + b_2\sin 4\pi x + \ldots.$$

Si, dans la relation fonctionnelle

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$

on remplace successivement x par $x+1, x+2, \ldots, x+m-1$, on trouve

$$\Gamma(x+2) = (x+1)\Gamma(x+1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Gamma(x+m) = (x+m-1)\Gamma(x+m-1),$$

d'où, m étant un entier positif,

$$\Gamma(x+m) = x(x+1)\ldots(x+m-1)\Gamma(x).$$

Soit x une valeur donnée de la variable extérieure à l'intervalle $(0, 1)$; en désignant par m l'entier positif immédiatement inférieur à x ou supérieur à $-x$ suivant que x est positif ou négatif, la formule précédente permet de ramener le calcul de $\Gamma(x)$ à la détermination de cette fonction pour une valeur de x intérieure à l'intervalle $(0, 1)$. En effet, si x est positif, on a

$$\Gamma(x) = (x-m)(x-m+1)\ldots(x-1)\Gamma(x-m),$$

$\Gamma \ldots 1.2.3.m\Gamma(1) = 1.2.3 \ldots$

et si x est négatif, on peut poser

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}.$$

Quand la variable est un entier $n+1$, on obtient simplement

$$\Gamma(n+1) = 1.2\ldots n.$$

Développement de $\log\Gamma(1+x)$ en série entière. — On a vu que

$$\log\Gamma(1+x) = -Cx + \left[\frac{x}{1} - \log\left(1+\frac{x}{1}\right)\right] + \left[\frac{x}{2} - \log\left(1+\frac{x}{2}\right)\right] + \ldots$$

Pour toute valeur de x de valeur absolue inférieure à l'unité, les termes de cette série, à partir du second, sont développables en séries entières absolument convergentes

$$\frac{x}{1} - \log\left(1+\frac{x}{1}\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \ldots,$$

$$\frac{x}{2} - \log\left(1+\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x}{n} - \log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{n}\right)^4 - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'ailleurs, si r est la valeur absolue de x, la série positive de terme général

$$\frac{1}{2}\left(\frac{r}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{n}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{n}\right)^4 + \ldots$$

est convergente et a pour somme

$$\log\Gamma(1-r) - Cr;$$

par suite, si l'on pose

$$S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots,$$

en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x, on trouve

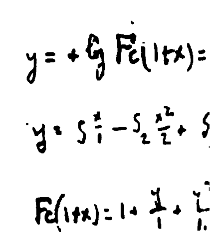
$$\log\Gamma(1+x) = -Cx + S_2\frac{x^2}{2} - S_3\frac{x^3}{3} + \ldots \qquad (-1 < x < 1).$$

Ce développement était connu d'Euler (¹); il reste convergent pour $x = 1$, les valeurs absolues de ses termes décroissant alors constamment et tendant vers zéro; par conséquent, d'après le théorème d'Abel,

$$\rho = \frac{S_2}{2} - \frac{S_3}{3} + \frac{S_4}{4} - \ldots,$$

formule qui peut être établie directement (p. 144-145).

Soit



férieure à
en séries
r de l'in-
le suivant
our $x = 0$,

intervalle
ent de son

$x^2 + \ldots$),

et, si x est négatif, on peut poser

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+m-1)}\Gamma(x+m).$$

Quand la variable est un entier $m+1$, on obtient simplement

$$\Gamma(m+1) = 1.2\ldots m.$$

Développement de $\log\Gamma(1+x)$ **en série entière.** — On a vu que

$$\log\Gamma(1+x) = -\rho x + \left[\frac{x}{1} - \log\left(1+\frac{x}{1}\right)\right] + \left[\frac{x}{2} - \log\left(1+\frac{x}{2}\right)\right] + \ldots.$$

Pour toute valeur de x de valeur absolue inférieure à l'unité, les termes de cette série, à partir du second, sont développables en séries entières absolument convergentes

$$\frac{x}{1} - \log\left(1+\frac{x}{1}\right) = \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{4}\,x^4 - \ldots,$$

$$\frac{x}{2} - \log\left(1+\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{x}{n} - \log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{n}\right)^4 - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'ailleurs, si r est la valeur absolue de x, la série positive de terme général

$$\frac{1}{2}\left(\frac{r}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{n}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{n}\right)^4 + \ldots$$

est convergente et a pour somme

$$\log\Gamma(1-r) - \rho r;$$

par suite, si l'on pose

$$S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots,$$

en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x, on trouve

$$\log\Gamma(1+x) = -\rho\frac{x}{1} + S_2\frac{x^2}{2} - S_3\frac{x^3}{3} + \ldots, \qquad -1 < x < 1.$$

Ce développement était connu d'Euler [1]; il reste convergent pour $x = 1$, les valeurs absolues de ses termes décroissant alors constamment et tendant vers zéro; par conséquent, d'après le théorème d'Abel,

$$\rho = \frac{S_2}{2} - \frac{S_3}{3} + \frac{S_4}{4} - \ldots,$$

formule qui peut être établie directement (p. 144-145).

Développement de $\Gamma(1+x)$ en série entière. — Soit

$$y = \log \Gamma(1+x),$$

d'où

$$y = -\rho\frac{x}{1} + S_2\frac{x^2}{2} - S_3\frac{x^3}{3} + \ldots, \qquad -1 < x \leqq 1,$$

on a

$$\Gamma(1+x) = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \ldots;$$

pour toute valeur négative de x de valeur absolue inférieure à l'unité, les termes de cette série sont développables en séries positives convergentes; par suite, x variant à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$, la fonction $\Gamma(1+x)$ est développable suivant une série entière; mais cette fonction se réduit à l'unité pour $x = 0$, son développement est donc de la forme

$$\Gamma(1+x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots;$$

la fonction $\Gamma(1+x)$ étant dérivable à l'intérieur de son intervalle de convergence, on obtient en dérivant le développement de son logarithme

$$\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} = -\rho + S_2 x - S_3 x^2 + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots = (1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots)(-\rho + S_2 x - S_3 x^2 + \ldots),$$

---

[1] *Institutiones Calculi differentialis*, partie 2, § 384.

d'où

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\rho,\\
2A_2 &= -\rho A_1 + S_2,\\
3A_3 &= -\rho A_2 + A_1 S_2 - S_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
nA_n &= -\rho A_{n-1} + A_{n-2} S_2 - A_{n-3} S_3 + \ldots + (-1)^n S_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots;
\end{aligned}$$

ces relations permettent de déterminer successivement les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Les vingt premiers d'entre eux ont été calculés avec douze décimales par Jeffery (¹).

Ainsi la fonction $\Gamma(1+x)$ est développable en une série entière de rayon de convergence égal à l'unité. Une conséquence importante de ce résultat est que $\Gamma(x)$ est dérivable pour toute valeur de x non égale à zéro ou à un entier négatif; en effet, suivant que x est positif ou négatif, on a

$$\Gamma(x) = (x-m+1)\ldots(x-1)[1 + A_1(x-m) + A_2(x-m)^2 + \ldots],$$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+m)}[1 + A_1(x+m) + A_2(x+m)^2 + \ldots],$$

en désignant par m l'entier positif immédiatement inférieur à x dans le premier cas et supérieur à $-x$ dans le second.

Limite pour $n=\infty$ de l'expression $\frac{1}{n^x}\frac{\Gamma(x+n)}{1.2\ldots(n-1)}$. — On a

$$\frac{1}{n^x}\frac{\Gamma(x+n)}{1.2\ldots(n-1)} = \frac{1}{n^x}\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{1.2\ldots(n-1)}\Gamma(x),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n^x}\frac{\Gamma(x+n)}{1.2\ldots(n-1)} = \frac{n}{n+x}\frac{\Gamma(x)}{\Pi(x)};$$

la limite de l'expression

$$\frac{1}{n^x}\frac{\Gamma(x+n)}{1.2\ldots(n-1)},$$

(¹) *The quarterly Journal of pure and applied Mathematics*, t. VI, 1864, p. 96-97.

pour $n = \infty$, est donc égale à l'unité. Ce résultat indiqué par Weierstrass [1], joint à la relation fonctionnelle, suffit évidemment à caractériser la fonction gamma; car, le supposant vérifié, on en déduit sans peine, au moyen de la relation fonctionnelle, que $\Gamma(x)$ est la limite du produit $\Pi(x)$.

On a été ainsi amené, par analogie, à étudier des fonctions définies par la double condition de vérifier une équation semblable à la relation fonctionnelle de $\Gamma(x)$, et de satisfaire à une autre relation quelconque. Nous nous bornerons à traiter le plus simple des problèmes de ce genre dont la solution est donnée par les fonctions de Prym.

Applications. — La propriété de la fonction gamma qui vient d'être établie fournit parfois un procédé commode pour la discussion de certaines séries dont les termes sont formés avec des factorielles. Nous n'en citerons que deux exemples :

I. — **Étude d'une série de Stirling.** — Soient

$$a_n = a(a+1)\ldots(a+n-1),$$
$$b_n = b(b+1)\ldots(b+n-1),$$

en convenant de regarder a_0 et b_0 comme égaux à l'unité; on a

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n}\left(1 - \frac{a+n}{b+n}\right) = (b-a)\frac{a_n}{b_{n+1}},$$

d'où

$$\frac{a_0}{b_0} - \frac{a_1}{b_1} = (b-a)\frac{a_0}{b_1},$$
$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = (b-a)\frac{a_1}{b_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_n} = (b-a)\frac{a_{n-1}}{b_n},$$

par suite

$$\frac{1}{b-a}\left(1 - \frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a_0}{b_1} + \frac{a_1}{b_2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{b_n}.$$

Or

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n^{b-a}}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\left[\frac{1}{n^a}\frac{\Gamma(a+n)}{1.2\ldots(n-1)}\right] : \left[\frac{1}{n^b}\frac{\Gamma(b+n)}{1.2\ldots(n-1)}\right];$$

(1) *Über die Theorie der analytischen Facultäten* (*Mathematische Werke*, t. I, p. 166 et p. 193-194).

on en conclut que le développement

$$\frac{1}{b-a} = \frac{1}{b} + \frac{a}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)(b+2)} + \ldots$$

est valable en supposant positive la différence $b-a$; de plus, cette condition étant remplie, il est absolument convergent, car

$$n^{b-a+1}\left|\frac{a_n}{b_{n+1}}\right| = \left|\frac{n}{n+b}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\left[\frac{1}{n^a}\frac{\Gamma(a+n)}{1.2\ldots(n-1)}\right] : \left[\frac{1}{n^b}\frac{\Gamma(b+n)}{1.2\ldots(n-1)}\right]\right|,$$

égalité dont le second membre tend vers une limite pour $n=\infty$.

La série précédente est l'une de celles que Stirling [1] a considérées.

II. — **Convergence de la série hypergéométrique.** — Le terme général de la série hypergéométrique

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n$$

est, comme on le constate aisément, le produit des deux expressions

$$n^{\alpha+\beta-\gamma-1}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^n$$

et

$$\left[\frac{1}{n^\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{1}{n^\beta}\frac{\Gamma(\beta+n)}{1.2\ldots(n-1)}\right] : \left[\frac{1}{n^\gamma}\frac{\Gamma(\gamma+n)}{1.2\ldots(n-1)}\right],$$

cette dernière ayant pour limite l'unité lorsque n devient infini; par suite, on peut poser

$$|u_n| = \lambda_n n^{\alpha+\beta-\gamma-1}|x|^n,$$

en désignant par λ_n un coefficient qui tend vers une limite pour $n=\infty$. On déduit immédiatement de l'égalité précédente les conditions de convergence déjà trouvées (p. 85).

[1] *Methodus differentialis : sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, p. 12.

Relation des compléments. — Si l'on considère les deux expressions

$$\frac{1}{\Pi(x)} = n^{-x}x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right),$$

$$\frac{1}{\Pi(-x)} = -n^{x}x\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right),$$

en les multipliant, on trouve

$$\frac{1}{\Pi(x)\Pi(-x)} = -x^2\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right);$$

mais

$$\sin\pi x = \pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots,$$

par suite, à la limite,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Cette formule a reçu le nom de *relation des compléments*; elle a été donnée par Euler dans ses *Institutiones Calculi integralis* (¹). Il est à peine besoin de faire remarquer que l'emploi de la formule de Weierstrass y conduit d'une façon immédiate.

La relation des compléments permet de limiter l'intervalle où il est nécessaire de calculer $\Gamma(x)$ à l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Si l'on fait $x = \frac{1}{2}$ dans la relation des compléments, on obtient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

en prenant la détermination positive du radical, puisque la fonction $\Gamma(x)$ est positive en même temps que x. Le résultat précédent, qui a une grande importance, est dû à Euler (²).

Application. Calcul de $\Gamma(x)$. — Le développement de $\log\Gamma(1+x)$ en série entière n'est pas d'un usage commode pour les calculs

---

(¹) 3ᵉ éd., t. I, § 351, p. 218-221, et t. IV, p. 104-105.

(²) *Commentarii Academiae Scientiarum imperialis petropolitanae*, t. V, 1730-1731, p. 44.

numériques; Legendre ([1]), afin de le rendre plus convergent, l'a transformé de la manière suivante :

On a

$$\begin{aligned}\log\Gamma(1+x) &= -\rho\frac{x}{1} + S_2\frac{x^2}{2} - S_3\frac{x^3}{3} + \ldots,\\ \log(1+x) &= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,\end{aligned}$$

d'où

$$\log\Gamma(1+x) = -\log(1+x) + (1-\rho)\frac{x}{1} - (1-S_2)\frac{x^2}{2} + (1-S_3)\frac{x^3}{3} - \ldots,$$

de même

$$\log\Gamma(1-x) = -\log(1-x) - (1-\rho)\frac{x}{1} - (1-S_2)\frac{x^2}{2} - (1-S_3)\frac{x^3}{3} - \ldots,$$

par suite

$$\log\Gamma(1+x) - \log\Gamma(1-x) = \log\frac{1-x}{1+x} + 2(1-\rho)\frac{x}{1} + 2(1-S_3)\frac{x^3}{3} + \ldots;$$

mais

$$\log\Gamma(1+x) + \log\Gamma(1-x) = \log\frac{\pi x}{\sin\pi x};$$

il en résulte

$$\log\Gamma(1+x) = \frac{1}{2}\log\frac{\pi x}{\sin\pi x} + \frac{1}{2}\log\frac{1-x}{1+x} + (1-\rho)\frac{x}{1} + (1-S_3)\frac{x^3}{3} + \ldots.$$

Cette série, dont Legendre a calculé les huit premiers coefficients avec douze décimales après avoir converti les logarithmes népériens en logarithmes vulgaires, est très convergente pour les petites valeurs de x; en particulier, si l'on y fait $x = -\frac{1}{2}$, elle devient

$$\rho = 1 - \log\frac{3}{2} - \frac{1}{2^2}\frac{S_3-1}{3} - \frac{1}{2^4}\frac{S_5-1}{5} - \ldots,$$

formule qui peut servir au calcul de ρ. Euler, en l'employant, a obtenu la valeur de cette constante avec douze décimales. Stieltjes ([2]), reprenant ce calcul, a obtenu ρ avec trente-trois décimales.

([1]) *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 433.
([2]) *Acta mathematica*, t. X, 1887, p. 302.

On trouve dans les *Exercices de Calcul intégral* de Legendre les tables de $\log\Gamma(x)$ depuis 1 jusqu'à 2, de millième en millième, d'abord avec sept décimales (t. I, p. 302-306), puis avec douze décimales (t. II, p. 85-95). Gauss [1] a fait calculer par Nicolai les tables de $\log\Gamma(x)$ à vingt décimales, de centième en centième, pour les valeurs de x comprises entre 1 et 2. Enfin, Bellavitis [2] a donné les tables de $\log\Gamma(x)$ à huit décimales, de dixième en dixième, depuis 10 jusqu'à 12.

Formule de Legendre. — Si, dans le produit

$$\Pi(x) = n^x \frac{1.2\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n)},$$

on remplace x par $x + \frac{1}{2}$, on trouve

$$\Pi\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{2n}{2x+2n+1} n^{x-\frac{1}{2}} \frac{2.4\ldots 2n}{(2x+1)(2x+3)\ldots(2x+2n-1)},$$

d'où

$$\Pi(x)\,\Pi\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{2n}{2x+2n+1} 2n^{2x-\frac{1}{2}} \frac{(2.4.6\ldots 2n)^2}{2x(2x+1)(2x+2)\ldots(2x+2n)},$$

égalité dont le second membre peut se mettre sous la forme

$$2^{-2x}\frac{2n}{2x+2n+1}(2n)^{2x}\frac{1.2\ldots 2n}{2x(2x+1)\ldots(2x+2n)}\,\frac{(2.4.6\ldots 2n)^2}{1.2.3\ldots 2n}\,\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Quand n augmente indéfiniment, le rapport

$$\frac{2n}{2x+2n+1}$$

tend vers l'unité, et l'expression

$$(2n)^{2x}\frac{1.2\ldots 2n}{2x(2x+1)\ldots(2x+2n)},$$

que l'on obtiendrait en substituant $2x$ à x, et $2n$ à n dans $\Pi(x)$,

---

[1] *Carl Friedrich Gauss Werke*, t. III, p. 161-162.

[2] *Memorie del reale Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, t. XVIII, 1874, p. 125-162.

devient égale à $\Gamma(2x)$; enfin, le dernier facteur

$$\frac{(2.4.6\ldots 2n)^2}{1.2.3\ldots 2n}\,\frac{2}{\sqrt{n}}$$

pouvant être mis sous la forme

$$2\sqrt{2\,\frac{2n+1}{2n}\left(\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots \overline{2n-1}}\right)^2\frac{1}{2n+1}},$$

on voit que sa limite, pour $n=\infty$, est $2\sqrt{\pi}$ d'après la formule de Wallis; de là résulte

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2x}}\,\Gamma(2x).$$

Cette formule, trouvée par Legendre [1], donne le moyen de réduire l'intervalle où il est nécessaire de calculer $\Gamma(x)$ à l'intervalle $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

La formule de Legendre n'est qu'un cas particulier d'une formule plus générale que nous allons donner.

Formule de Gauss. — On a

$$\Pi(x)=\frac{n}{x+n}\,n^{x-1}\,\frac{1.2\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n-1)},$$

de même

$$\Pi\left(x+\frac{1}{m}\right)=\frac{n}{x+\frac{1}{m}+n}\,n^{x+\frac{1}{m}-1}\,\frac{1.2\ldots n}{\left(x+\frac{1}{m}\right)\left(x+\frac{1}{m}+1\right)\ldots\left(x+\frac{1}{m}+n-1\right)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\Pi\left(x+\frac{p}{m}\right)=\frac{n}{x+\frac{p}{m}+n}\,n^{x+\frac{p}{m}-1}\,\frac{1.2\ldots n}{\left(x+\frac{p}{m}\right)\left(x+\frac{p}{m}+1\right)\cdots\left(x+\frac{p}{m}+n-1\right)};$$

si l'on fait $p=m-1$ et que l'on multiplie toutes ces relations,

---

[1] *Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, 1809, p. 485. Binet a donné de cette formule une démonstration directe différente de celle qui précède (*Journal de l'École royale polytechnique*, 27e cahier, t. XVI, 1839, p. 209-210).

P désignant le produit des premiers membres, on obtient

$$P = A\frac{mn}{mx+mn}n^{mx-\frac{m+1}{2}}\frac{(1.2\ldots n)^m}{mx(mx+1)\ldots(mx+mn-1)}m^{mn},$$

en posant

$$A = \frac{(mn)^{m-1}}{(mx+mn+1)(mx+mn+2)\ldots(mx+mn+m-1)},$$

fraction dont la limite est l'unité pour $n=\infty$.

D'autre part, si l'on remplace dans $\Pi(x)$ le nombre n par mn, et x par mx, on trouve une nouvelle expression

$$Q = \frac{mn}{mx+mn}(mn)^{mx-1}\frac{1.2\ldots mn}{mx(mx+1)\ldots(mx+mn-1)}$$

dont la limite est $\Gamma(mx)$ pour $n=\infty$; par suite

$$P = AQm^{-mx}\frac{(1.2\ldots n)^m}{1.2\ldots mn}\frac{m^{mn+1}}{n^{\frac{m-1}{2}}}.$$

Soit

$$\varphi(n) = \frac{1.2\ldots n}{n^{n+\frac{1}{2}}},$$

d'où

$$\frac{P}{Q} = A\frac{\varphi^m(n)}{\varphi(mn)}m^{-mx+\frac{1}{2}};$$

quand n croît indéfiniment, le rapport $\frac{\varphi^m(n)}{\varphi(mn)}$ a une limite λ_m qui est évidemment égale à celle de la fraction

$$\frac{\varphi^{2m}(n)}{\varphi^2(mn)}:\frac{\varphi^m(2n)}{\varphi(2mn)},$$

ou

$$\left[\frac{\varphi^2(n)}{\varphi(2n)}\right]^m:\left[\frac{\varphi^2(mn)}{\varphi(2mn)}\right],$$

quotient dont les deux termes ont respectivement pour limites λ_2^m et λ_2; or,

$$\frac{\varphi^2(n)}{\varphi(2n)} = \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{(2.4.6\ldots 2n)^2}{1.2.3\ldots 2n},$$

d'où

$$\frac{\varphi^2(n)}{\varphi(2n)} = \sqrt{4\frac{2n+1}{2n}\left(\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}\right)^2\frac{1}{2n+1}},$$

par conséquent, d'après la formule de Wallis, λ_2 est égal à $\sqrt{2\pi}$; on en conclut

$$\lambda_m = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}},$$

donc

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\, m^{-mx+\frac{1}{2}}\,\Gamma(mx).$$

Cette formule est due à Gauss [1]; on doit y prendre les déterminations positives des radicaux, puisque le premier membre est positif pour toute valeur positive de x.

Si l'on pose $x = \frac{1}{m}$ dans la formule de Gauss, elle devient

$$\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}},$$

relation très élégante qui a été donnée par Euler [2]; on peut l'établir directement et en déduire la formule de Gauss par un procédé inverse de celui que nous avons suivi.

Si maintenant on fait $m = 2$, on retrouve la formule de Legendre. Il est d'ailleurs facile, ainsi que l'a montré Binet [3], de tirer la formule de Gauss de la formule de Legendre.

On peut, au moyen de la formule de Gauss, en y donnant successivement à m les valeurs 3, 5, 7, 11, ..., restreindre de plus en plus l'intervalle où le calcul direct de $\Gamma(x)$ est indispensable. On est ainsi conduit à se demander quel est l'intervalle minimum auquel on puisse parvenir; Legendre [4] et, plus tard, Hoppe [5]

---

(1) *Carl Friedrich Gauss Werke*, t. III, p. 149-150.

(2) *Opera postuma Leonhardi Euleri mathematica et physica*, t. I, p. 408-438. *Voir* aussi *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. IV, 1880, p. 207-256.

(3) *Journal de l'École royale polytechnique*, 27e cahier, t. XVI, 1839, p. 208-212. Parmi les nombreuses démonstrations de la formule de Gauss, celle de Sonine mérite aussi d'être citée (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. IX, 1880-1881, p. 162-166).

(4) *Exercices de Calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures*, t. I, p. 283-285, et t. II, p. 26-31.

(5) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XL, 1850, p. 152-154.

se sont occupés de cette question, mais sans la traiter dans toute sa généralité. C'est à Landau ([1]) que l'on doit de l'avoir élucidée.

Relation entre la fonction gamma et la série hypergéométrique. — La relation (p. 88) qui existe entre la fonction F et les deux fonctions contiguës $F(\gamma+1)$ et $F(\gamma-1)$, se réduit, pour $x=1$, à l'égalité

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma,1)}{F(\alpha,\beta,\gamma+1,1)}=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)};$$

de même

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma+1,1)}{F(\alpha,\beta,\gamma+2,1)}=\frac{(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta+1)}{(\gamma+1)(\gamma-\alpha-\beta+1)},$$

...................................,

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma+n-1,1)}{F(\alpha,\beta,\gamma+n,1)}=\frac{(\gamma-\alpha+n-1)(\gamma-\beta+n-1)}{(\gamma+n-1)(\gamma-\alpha-\beta+n-1)},$$

d'où

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma,1)}{F(\alpha,\beta,\gamma+n,1)}=\frac{\Gamma(\gamma-\alpha+n)\Gamma(\gamma-\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+n)}\,\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)};$$

mais, lorsque n augmente indéfiniment, $F(\alpha,\beta,\gamma+n,1)$ a pour limite l'unité et il en est de même du premier facteur du second membre (p. 208-209), par suite

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\ ([2]).$$

Les paramètres α, β, γ doivent alors vérifier l'inégalité

$$\alpha+\beta-\gamma<0.$$

La relation précédente peut servir, et c'est la méthode qu'a suivie Gauss, à établir les principales propriétés de la fonction gamma.

D'ailleurs, inversement, comme l'a montré Thomae ([3]), la théorie de la série hypergéométrique peut être exposée, d'une

---

([1]) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. CXXIII, 1901, p. 276-283.

([2]) *Carl Friedrich Gauss Werke*, t. III, p. 147. La généralisation de cette formule a fait l'objet d'un Mémoire de Mellin (*Acta Societatis Scientiarum fennicae*, t. XXIII, 1897, n° 7).

([3]) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XXVI, 1881, p. 314-333, et t. XXVII, 1882, p. 41-56.

façon tout à fait élémentaire, en prenant pour point de départ les premières propriétés de $\Gamma(x)$.

Fonction de Binet. — La variable x étant positive, soit

$$\varpi(x) = \log\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}}\right],$$

la fonction $\varpi(x)$ (¹), introduite par Plana (²), est généralement appelée *fonction de Binet*. On doit, en effet, à Binet (³) une étude très développée de cette transcendante.

On déduit de l'expression de $\varpi(x)$

$$\varpi(x) - \varpi(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1;$$

cette relation, signalée par Binet (⁴), joue, par rapport à la fonction $\varpi(x)$, un rôle analogue à celui de la relation fonctionnelle dans l'étude de $\Gamma(x)$.

Formule de Stirling. — On a

$$\varpi(x) - \varpi(x+1) = \frac{2x+1}{2}\,[\log(x+1) - \log x] - 1;$$

mais, si, dans le développement (p. 140)

$$\log(x+1) - \log x = \frac{2}{2x+1}\left[1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2x+1)^4} + \ldots\right],$$

on remplace les coefficients $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$, d'abord par zéro, puis par le plus grand d'entre eux $\frac{1}{3}$, on obtient la double inégalité

$$\frac{2}{2x+1} < \log(x+1) - \log x < \frac{2}{2x+1}\left[1 + \frac{1}{12}\,\frac{1}{x(x+1)}\right],$$

(¹) C'est Cauchy qui le premier a fait usage de cette notation (*Œuvres complètes*, 1re série, t. VII, p. 281).

(²) *Memorie della reale Accademia delle Scienze di Torino*, t. XXIV, 1820, p. 410.

(³) *Journal de l'École royale polytechnique*, 27e cahier, t. XVI, 1839, p. 220-269.

(⁴) *Journal de l'École royale polytechnique*, 27e cahier, t. XVI, 1839, p. 228.

qui entraîne la suivante

$$0 < \quad \varpi(x) - \varpi(x+1) \quad < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right),$$

et, pareillement,

$$0 < \quad \varpi(x+1) - \varpi(x+2) \quad < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$0 < \varpi(x+n-1) - \varpi(x+n) < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}\right);$$

en ajoutant on trouve

$$0 < \varpi(x) - \varpi(x+n) < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}\right).$$

En particulier, pour $x = n$, ces inégalités deviennent

$$0 < \varpi(n) - \varpi(2n) < \frac{1}{24n},$$

par suite, si l'on pose

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}},$$

$\varpi(x) = \lg \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \lg \varphi(x)$

on voit que le rapport $\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}$ tend vers l'unité; or

$$\frac{\varphi^2(n)}{\varphi(2n)} = \sqrt{4\frac{2n+1}{2n}\left(\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}\right)^2\frac{1}{2n+1}},$$

expression dont la limite, pour $n = \infty$, est égale à $\sqrt{2\pi}$, d'après la formule de Wallis; quand n croît indéfiniment, $\varphi(n)$ a donc pour limite $\sqrt{2\pi}$, et il en est de même de $\varphi(x+n)$, car

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(x+n)} = \left[e^{-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{x+n-\frac{1}{2}}\right] : \left[\frac{1}{n^x}\,\frac{\Gamma(x+n)}{1.2\ldots(n-1)}\right],$$

égalité dont le second membre tend vers l'unité pour $n = \infty$. On en conclut que, pour $n = \infty$, la limite de $\varpi(x+n)$ est zéro. La fonction $\varpi(x)$ vérifie donc la double inégalité

$$0 < \varpi(x) < \frac{1}{12x},$$

et l'on peut poser

$$\varpi(x) = \frac{\theta}{12x},$$

en désignant par θ un nombre positif compris entre o et 1. Si l'on remplace $\varpi(x)$ par cette expression dans l'égalité

$$\varpi(x) = \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}},$$

elle devient

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{\theta}{12x}};$$

c'est la *formule de Stirling* [1]. Lorsque la variable est égale à un entier m, cette formule se réduit à

$$1.2.3\ldots m = \sqrt{2\pi}\, m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m+\frac{\theta}{12m}},$$

résultat qui a une grande importance dans le calcul des probabilités.

La formule de Stirling a fait l'objet de bien des démonstrations, dont notamment celles de Cesàro [2] et de Rouché [3] que nous avons mises à profit.

Applications. — I. — La formule de Stirling permet de calculer deux limites du nombre de Bernoulli B_n.

En effet,

$$B_n = \frac{1.2\ldots 2n}{2^{2n-1}\pi^{2n}} S_{2n},$$

par suite

$$\frac{B_n}{B_1} = \frac{1.2\ldots 2n}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}} \frac{S_{2n}}{S_2},$$

mais, S_{2n} décroissant à mesure que n augmente, il en résulte

$$\frac{B_n}{B_1} < \frac{1.2\ldots 2n}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}},$$

---

(1) *Methodus differentialis : sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, p. 135-139.

(2) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, 1880, p. 354-357.

(3) *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, t. CX, 1890, p. 513-515. La démonstration de Rouché est relative au cas où x est un entier positif. Gomes Teixeira l'a étendue au cas où x est un nombre positif quelconque (*Nouvelles Annales de Mathématiques*. 3e série, t. X, 1891, p. 312-315).

d'où, comme B_1 est égal à $\frac{1}{6}$,

$$B_n < \frac{1}{12} \frac{\Gamma(2n+1)}{(2\pi)^{2n-2}};$$

d'autre part, si, dans l'expression de B_n, on remplace S_{2n} par l'unité, on en déduit

$$B_n > 2\frac{\Gamma(2n+1)}{(2\pi)^{2n}}.$$

Or, d'après la formule de Stirling, $\Gamma(2n+1)$ vérifie les inégalités

$$\Gamma(2n+1) > \sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n},$$

$$\Gamma(2n+1) < \sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n+\frac{1}{24n}},$$

on a donc

$$B_n < \frac{1}{12} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{5}{2}}} e^{-2n+\frac{1}{24n}},$$

$$B_n > 2\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{1}{2}}} e^{-2n}.$$

La première de ces limites, entre lesquelles B_n reste compris, a été indiquée par Cauchy (¹).

II. — La formule de Stirling est d'un usage commode pour l'évaluation de certaines limites.

Soit, par exemple,

$$U_n = \frac{(1.2\ldots n)^m}{1.2\ldots mn} \frac{m^{mn+1}}{n^{\frac{m-1}{2}}};$$

on a

$$(1.2\ldots n)^m = (2\pi)^{\frac{m}{2}} n^{mn+\frac{m}{2}} e^{-mn+m\varpi(n)},$$

$$1.2\ldots mn = (2\pi)^{\frac{1}{2}}(mn)^{mn+\frac{1}{2}} e^{-mn+\varpi(mn)},$$

par suite,

$$U_n = m^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}} e^{m\varpi(n)-\varpi(mn)};$$

(¹) *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, p. 396-397.

quand n croît indéfiniment, m restant fixe, $\varpi(n)$ et $\varpi(mn)$ tendent vers zéro, et U_n a pour limite

$$U = m^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}.$$

C'est ainsi que Cauchy [1] a déduit la formule de Gauss de la formule de Stirling.

Formule de Gudermann. — De l'égalité

$$\varpi(x) - \varpi(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1,$$

on déduit successivement

$$\varpi(x+1) - \varpi(x+2) = \left(x + \frac{3}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) - 1,$$

. . . . ,

$$\varpi(x+n) - \varpi(x+n+1) = \left(x + \frac{2n+1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x+n}\right) - 1,$$

d'où

$$\varpi(x) - \varpi(x+n+1) = \sum_{p=0}^{p=n}\left[\left(x + \frac{2p+1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x+p}\right) - 1\right],$$

et par suite, pour $n = \infty$,

$$\varpi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\left(x + \frac{2n+1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x+n}\right) - 1\right];$$

c'est la *formule de Gudermann* [2].

Séries de Binet. — Le terme de rang n de la série $\varpi(x)$ peut se mettre sous la forme

$$u_{n-1} = -(x+n)\log\left(1 - \frac{1}{x+n}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x+n}\right) - 1;$$

---

(1) *Exercices de Mathématiques* (*Œuvres complètes*, 2e série, t. VII, p. 121-123).

(2) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XXIX, 1845, p. 210. Gudermann, dans son Mémoire, semble craindre qu'il n'y ait contradiction entre sa formule et la formule de Stirling. Cette appréhension est rien moins que justifiée.

mais, pour toute valeur entière de n,

$$\log\left(1-\frac{1}{x+n}\right)=-\frac{1}{x+n}-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+n)^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{(x+n)^3}-\frac{1}{4}\frac{1}{(x+n)^4}-\ldots,$$

en supposant x positif; le $n^{\text{ième}}$ terme de $\varpi(x)$ est alors développable suivant la série positive

$$u_{n-1}=\frac{1}{3.4}\frac{1}{(x+n)^2}+\frac{2}{4.6}\frac{1}{(x+n)^3}+\frac{3}{5.8}\frac{1}{(x+n)^4}+\ldots;$$

par suite, d'après le théorème des séries de séries,

$$\varpi(x)=\frac{1}{3.4}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(x+n)^2}+\frac{2}{4.6}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(x+n)^3}+\frac{3}{5.8}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(x+n)^4}+\ldots,$$
$$x>0.$$

Cette formule remarquable a été établie pour la première fois par Binet (¹).

Maintenant, le terme de rang $n+1$ de $\varpi(x)$ peut être mis sous la forme

$$u_n=(x+n)\log\left(1+\frac{1}{x+n}\right)+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{x+n}\right)-1;$$

or, à partir de $n=0$, on a

$$\log\left(1+\frac{1}{x+n}\right)=\frac{1}{x+n}-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+n)^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{(x+n)^3}-\frac{1}{4}\frac{1}{(x+n)^4}+\ldots,$$

en supposant x supérieur ou égal à l'unité; par conséquent

$$u_n=\frac{1}{3.4}\frac{1}{(x+n)^2}-\frac{2}{4.6}\frac{1}{(x+n)^3}+\frac{3}{5.8}\frac{1}{(x+n)^4}-\ldots;$$

d'ailleurs, la série positive de terme général

$$\frac{1}{3.4}\frac{1}{(x+n)^2}+\frac{2}{4.6}\frac{1}{(x+n)^3}+\frac{3}{5.8}\frac{1}{(x+n)^4}+\ldots$$

(¹) *Journal de l'École royale polytechnique*, 27ᵉ cahier, t. XVI, 1839, p. 226. La démonstration que nous donnons ici nous paraît plus simple que toutes celles qui ont été proposées. *Voir*, par exemple, celle exposée par Bourguet dans sa Thèse, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 2ᵉ série, t. X, 1881, p. 178-185.

est convergente, comme on vient de le voir; donc

$$\varpi(x) = \frac{1}{3.4}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(x+n)^2} - \frac{2}{4.6}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(x+n)^3} + \frac{3}{5.8}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(x+n)^4} - \ldots$$
$$x \geq 1,$$

formule due également à Binet (¹). Ce dernier développement diffère du précédent par l'alternance des signes; en outre, dans les sommes, la valeur initiale de n est zéro au lieu d'être l'unité.

L'étude des séries de Binet, leur transformation en séries se prêtant mieux au calcul numérique, et enfin la détermination du reste, ont donné lieu à de nombreux travaux.

Série de Stirling. — Si l'on met la fonction de Binet sous la forme

$$\varpi(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty}\left[\left(x+m-\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x+m-1}\right)-1\right],$$

en faisant le changement de variable

$$t = \frac{1}{2x+2m-1},$$

on obtient

$$\varpi(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty}\left[\frac{1}{2t}\log\frac{1+t}{1-t}-1\right];$$

or, le terme général de cette série est la somme du développement (p. 140)

$$\frac{t^2}{3}+\frac{t^4}{5}+\ldots+\frac{t^{2p}}{2p+1}+\ldots,$$

par suite

$$\varpi(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{2p+1}\,\frac{1}{(2x+2m-1)^{2p}}.$$

Ce développement de $\varpi(x)$ en série de série est dû à

(¹) *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, t. IX, 1839, p. 158. On a souvent attribué à Féaux la seconde des formules de Binet.

Gilbert [1]; pour en déduire la série de Stirling, il y a lieu d'utiliser une formule relative aux nombres de Bernoulli que l'on peut établir de la manière suivante :

Lorsque, dans la relation de récurrence qui définit les nombres de Bernoulli (p. 117)

$$\begin{aligned}\frac{2n+1}{1}2^{2n}\mathrm{B}_n - \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3}2^{2n-2}\mathrm{B}_{n-1} + \ldots \\ + (-1)^{n-1}\frac{(2n+1)2n}{1.2}2^2\mathrm{B}_1 + (-1)^n 2n = 0,\end{aligned}$$

on remplace n par $n+1$, elle devient, après avoir multiplié par $(-1)^{n+1}$,

$$\begin{aligned}2(n+1) - \frac{(2n+3)(2n+2)}{1.2}2^2\mathrm{B}_1 + \ldots \\ + (-1)^n\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}{1.2.3}2^{2n}\mathrm{B}_n \\ - (-1)^n\frac{2n+3}{1}2^{2n+2}\mathrm{B}_{n+1} = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $p = n+1$, l'équation

$$\begin{aligned}2p - \frac{(2p+1)2p}{1.2}2^2\mathrm{B}_1 + \ldots \\ + (-1)^n\frac{(2p+1)2p\ldots(2p-2n+2)}{1.2\ldots 2n}2^{2n}\mathrm{B}_n \\ - (-1)^n\frac{(2p+1)2p\ldots(2p-2n)}{1.2\ldots(2n+2)}2^{2n+2}\mathrm{B}_{n+1} = 0\end{aligned}$$

est vérifiée; si l'on désigne alors par $u_0, u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n, u_{n+1}$ les valeurs absolues des termes de son premier membre, on trouve

$$\frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{\pi^2}{(2p-2k+1)(2p-2k)}\frac{\mathrm{S}_{2k}}{\mathrm{S}_{2k+2}};$$

mais, l'entier k étant au plus égal à n, à partir de $p = n+2$, la condition

$$\frac{\pi^2}{(2p-2k+1)(2p-2k)} < \frac{\pi^2}{20}$$

---

(1) *Mémoires de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, t. XLI, 1875-1876.

est remplie; d'autre part, les inégalités évidentes

$$S_{2k+2} > 1, \qquad S_{2k} \leq S_2$$

entraînent la suivante

$$\frac{S_{2k}}{S_{2k+2}} < \frac{\pi^2}{6};$$

on en conclut

$$\frac{u_k}{u_{k+1}} < 1,$$

inégalité qui est vérifiée même pour $k = 0$, comme on le constate sans peine; de là résultent les doubles inégalités

$$0 < u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + u_{2k} < u_{2k+1},$$
$$u_{2k} < u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots - u_{2k-1} < 0,$$

et l'on peut poser

$$u_0 - u_1 + u_2 - \ldots + (-1)^n u_n = (-1)^n \lambda u_{n+1}, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

En définitive, le nombre positif λ_p étant au plus égal à l'unité, à partir de $n = 0$ et de $p = n + 1$, on a

$$\begin{aligned}
2p - \frac{(2p+1)2p}{1.2}2^2 B_1 + \ldots \\
+ (-1)^n \frac{(2p+1)2p\ldots(2p-2n+2)}{1.2\ldots 2n} 2^{2n} B_n \\
- (-1)^n \lambda_p \frac{(2p+1)2p\ldots(2p-2n)}{1.2\ldots(2n+2)} 2^{2n+2} B_{n+1} = 0,
\end{aligned}$$

d'où, en divisant par $2p(2p+1)$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2p+1} = \frac{1}{1.2}2^2 B_1 - \frac{(2p-1)(2p-2)}{1.2.3.4}2^4 B_2 + \ldots \\
- (-1)^n \frac{(2p-1)\ldots(2p-2n+2)}{1.2\ldots 2n} 2^{2n} B_n \\
+ (-1)^n \lambda_p \frac{(2p-1)\ldots(2p-2n)}{1.2\ldots(2n+2)} 2^{2n+2} B_{n+1},
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\frac{1}{3} = \frac{B_1}{1.2}2^2,$$
$$\frac{1}{5} = \frac{B_1}{1.2}2^2 - \frac{B_2}{3.4}2^4\frac{3.2}{1.2},$$



. . . .

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2n+3} &= \frac{B_1}{1.2}2^2 - \frac{B_2}{3.4}2^4\frac{(2n+1)2n}{1.2} + \ldots \\
&\quad + (-1)^n \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} 2^{2n+2}\frac{(2n+1)\ldots 2}{1.2\ldots 2n}, \\
\frac{1}{2n+5} &= \frac{B_1}{1.2}2^2 - \frac{B_2}{3.4}2^4\frac{(2n+3)(2n+2)}{1.2} + \ldots \\
&\quad + (-1)^n \frac{\lambda_{n+2}B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} 2^{2n+2}\frac{(2n+3)\ldots 4}{1.2\ldots 2n}, \\
\frac{1}{2n+7} &= \frac{B_1}{1.2}2^2 - \frac{B_2}{3.4}2^4\frac{(2n+5)(2n+4)}{1.2} + \ldots \\
&\quad + (-1)^n \frac{\lambda_{n+3}B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} 2^{2n+2}\frac{(2n+5)\ldots 6}{1.2\ldots 2n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{aligned}
$$

si l'on se reporte maintenant à la relation

$$\varpi(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{t^{2p}}{2p+1},$$

on voit que

$$
\begin{aligned}
\varpi(x) = a_1\frac{B_1}{1.2} - a_2\frac{B_2}{3.4} + \ldots - (-1)^n a_n \frac{B_n}{(2n-1)2n} \\
+ (-1)^n a_{n+1}\frac{\theta B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)},
\end{aligned}
$$

$$0 < \theta < 1,$$

en posant

$$a_k = 2^{2k}\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{p=k}^{p=\infty}\frac{(2p-1)(2p-2)\ldots(2p-2k+2)}{1.2\ldots(2k-2)}t^{2p};$$

dans la première sommation la limite inférieure de p est k puisque, pour les valeurs $1, 2, \ldots, k-1$ de p, le produit

$$(2p-1)(2p-2)\ldots(2p-2k+2)$$

s'annule; d'ailleurs, à partir de $p=k$, le rapport

$$\frac{(2p-1)(2p-2)\ldots(2p-2k+2)}{1.2\ldots(2k-2)}$$

est identiquement égal à

$$\frac{(2k-1)2k\ldots(2p-1)}{1.2\ldots(2p-2k+1)},$$

par suite

$$a_k = 2^{2k} \sum_{m=1}^{m=\infty} t^{2k-1} \sum_{p=k}^{p=\infty} \frac{(2k-1)2k\ldots(2p-1)}{1.2\ldots(2p-2k+1)} t^{2p-2k+1};$$

or, le développement

$$\frac{2k-1}{1} t + \frac{(2k-1)2k(2k+1)}{1.2.3} t^3 + \ldots$$

a pour somme

$$\frac{1}{2}[(1-t)^{-2k+1} - (1+t)^{-2k+1}],$$

c'est-à-dire

$$2^{-2k} t^{-2k+1}[(x+m-1)^{-2k+1} - (x+m)^{-2k+1}];$$

il s'ensuit que

$$a_k = \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[\frac{1}{(x+m-1)^{2k-1}} - \frac{1}{(x+m)^{2k-1}}\right],$$

d'où

$$a_k = \frac{1}{x^{2k-1}};$$

donc

$$\varpi(x) = \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{x^3} + \ldots - (-1)^n \frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{x^{2n-1}}$$
$$+ (-1)^n \frac{\theta B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{x^{2n+1}},$$
$$0 < \theta < 1.$$

ou bien

$$\log\Gamma(x) = \log\sqrt{2\pi} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{x^3} + \ldots$$
$$- (-1)^n \frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{x^{2n-1}} + (-1)^n \frac{\theta B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{x^{2n+1}}.$$

La série

$$\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{x^3} + \frac{B_3}{5.6}\frac{1}{x^5} - \ldots$$

est dite *série de Stirling* (¹). C'est Cauchy qui, dans un Mémoire

(¹) *Methodus differentialis : sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, p. 135-139.

$\log\Gamma(1+x) = -C\frac{x}{1} + S_2\frac{x^2}{2} - S_3\frac{x^3}{3} + \ldots$

très remarquable (¹), a donné l'expression du reste

$$R_n = (-1)^n \frac{\theta B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{x^{2n+1}}.$$

La méthode que nous avons adoptée pour y parvenir est toute différente de celle de Cauchy et des procédés généralement suivis; elle offre cet avantage d'être très élémentaire. Nous en avons trouvé le principe dans un Travail du mathématicien suédois Berger (²).

L'étude de la série de Stirling a fait l'objet de recherches nombreuses et intéressantes, parmi lesquelles on doit mentionner celles de Schaar, Genocchi, Limbourg, Bourguet. Cette série est, en effet, l'une des plus importantes et des plus curieuses de l'Analyse. Il est facile de constater qu'elle est divergente, car, si l'on pose

$$u_n = \frac{B_n}{(2n-1)2n} \frac{1}{x^{2n-1}},$$

on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1)2n}{4\pi^2 x^2} \frac{S_{2n+2}}{S_{2n}},$$

égalité dont le second membre croît indéfiniment avec n, de sorte qu'à partir d'un certain rang les valeurs absolues des termes augmentent sans cesse. Mais, et c'est là ce qui constitue l'originalité de la série de Stirling, bien qu'elle soit divergente, elle est néanmoins extrêmement utile pour le calcul approximatif, et ce fait provient de la décroissance rapide des premiers termes lorsque x est suffisamment grand. En prenant les valeurs absolues, l'erreur [de $\log\Gamma(x)$] commise est toujours moindre que le premier des termes négligés; elle sera la plus petite possible si l'on s'arrête au terme qui précède le terme minimum, et voici, d'après Legendre (³), comment on détermine à peu près l'indice du terme qu'il convient de ne pas dépasser :

(¹) *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, p. 386-398.

(²) *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, t. XXXVII, 1880, nº 10, p. 41-44 et p. 51-53. La démonstration de Berger est relative seulement au cas où x est un entier.

(³) *Exercices de Calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures*, t. I, p. 292.

$$\frac{d\omega(x)}{dx} = -\frac{B_1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{B_2}{4}\cdot\frac{1}{x^4} - \frac{B_3}{6}\cdot\frac{1}{x^6} + \cdots$$

$$\frac{d^2\omega(x)}{dx^2} = B_1\frac{1}{x^3} - B_2\frac{1}{x^5} + B_3\frac{1}{x^7} - \cdots$$

$$\frac{d^3\omega(x)}{dx^3} = -3B_1\frac{1}{x^4} + 5B_2\frac{1}{x^6} - 7B_3\frac{1}{x^8} + \cdots$$

De l'inégalité

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{(2n-1)2n}{4\pi^2 x^2}$$

on déduit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{3x}\right)^2,$$

par suite, u_n décroît tant que n ne devient pas supérieur à $3x$; le plus grand entier contenu dans $3x$ est donc sensiblement l'indice du terme auquel on doit borner le développement.

Soit ε_n la valeur absolue de l'erreur commise; elle a pour expression

$$\varepsilon_n = \frac{\theta B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{x^{2n+1}},$$

et, comme

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2} \frac{S_{2n+2}}{S_{2n}},$$

il en résulte

$$\varepsilon_n < \frac{B_n}{4\pi^2 x^{2n+1}};$$

si, dans cette inégalité, on remplace B_n par sa limite supérieure (p. 221)

$$\frac{2}{3}\pi^2 (n\pi)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n} e^{\frac{1}{24n}},$$

on obtient

$$\varepsilon_n < \frac{1}{6} \frac{(n\pi)^{\frac{1}{2}}}{x} \left(\frac{n}{\pi e x}\right)^{2n} e^{\frac{1}{24n}},$$

d'où, en faisant $n = 3x$,

$$\varepsilon_{3x} < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{6x-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{72x}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-6x},$$

et, à plus forte raison, x étant au moins égal à 1,

$$\varepsilon_{3x} < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{11}{2}} e^{\frac{1}{72}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-6x},$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_{3x} < 0,393\,409\ldots \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{6x}.$$

Le signe de l'erreur est le [illegible] que celui du premier terme négligé.

La série de Stirling, à cause de sa propriété si singulière de donner une grande approximation malgré sa divergence, fut longtemps considérée comme une inexplicable anomalie par les analystes qui estimaient l'emploi des séries convergentes seul légitime. Cette manière de voir n'était pas justifiée, car la théorie des séries divergentes peut être établie avec toute la rigueur désirable, ainsi que l'ont montré des travaux récents ([1]). En particulier, la série de Stirling rentre dans la classe des développements auxquels Poincaré ([2]) a donné le nom de *séries asymptotiques,* séries auxquelles il est possible, dans certaines conditions, d'appliquer les règles ordinaires du Calcul algébrique.

Fonctions de Prym.

On peut se proposer de déterminer la forme générale des fonctions $F(x)$ satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$F(x+1) - xF(x) = A,$$

où A désigne une constante, et telles que la limite, pour $n = \infty$, de l'expression

$$\frac{1}{n^x}\,\frac{F(x+n)}{1.2\ldots(n-1)}$$

soit égale à une autre constante B.

La relation fonctionnelle, supposée satisfaite, donne successivement

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{x}\,F(x+1) - A\,\frac{1}{x},\\
F(x+1) &= \frac{1}{x+1}\,F(x+2) - A\,\frac{1}{x+1},\\
F(x+2) &= \frac{1}{x+2}\,F(x+3) - A\,\frac{1}{x+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
F(x+n-1) &= \frac{1}{x+n-1}\,F(x+n) - A\,\frac{1}{x+n-1};
\end{aligned}$$

([1]) *Voir :* ÉMILE BOREL, *Leçons sur les séries divergentes.*

([2]) *Acta mathematica*, t. VIII, 1886, p. 295-303.

si l'on ajoute ces égalités multipliées respectivement par les rapports

$$\frac{1}{1},\quad \frac{1}{x},\quad \frac{1}{x(x+1)},\quad \ldots,\quad \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n-2)},$$

on trouve que $F(x)$ est égal à

$$F(x) = \frac{F(x+n)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} - A\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \ldots + \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}\right];$$

or

$$\frac{F(x+n)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} = \Gamma(x)\left[\frac{1}{n^x}\,\frac{F(x+n)}{1.2\ldots(n-1)} : \frac{1}{n^x}\,\frac{\Gamma(x+n)}{1.2\ldots(n-1)}\right],$$

et, la limite de cette expression étant $B\Gamma(x)$, si l'on représente par $S(x)$ la somme de la série convergente

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \ldots,$$

on a

$$F(x) = B\Gamma(x) - AS(x);$$

telle est la forme générale des fonctions $F(x)$; la fonction gamma est la plus simple; elle correspond au cas où A est nul et B égal à l'unité.

Si maintenant, dans la relation fonctionnelle

$$F(x+1) = A + xF(x),$$

on remplace x successivement par $x-1$, $x-2$, $\ldots$, $x-m$, on en déduit

$$F(x) = A + (x-1)F(x-1),$$
$$F(x-1) = A + (x-2)F(x-2),$$
$$F(x-2) = A + (x-3)F(x-3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$F(x-m-1) = A + (x-m)F(x-m);$$

en multipliant ces égalités respectivement par

$$1,\quad x-1,\quad (x-1)(x-2),\quad \ldots,\quad (x-1)(x-2)\ldots(x-m+1),$$

on obtient

$$F(x) = A[1 + (x-1) + (x-1)(x-2) + \ldots + (x-1)(x-2)\ldots(\text{[illegible]}$$
$$+ (x-1)(x-2)\ldots(x-m)F(x-m).$$

d'où, pour $x = m + 1$, l'entier m étant positif,

$$F(m+1) = A[1.2\ldots m + 2.3\ldots m + \ldots \\ + (m-1)m + m + 1] + 1.2\ldots m(B - Ae).$$

La série $S(x)$ est le produit de deux séries qu'il est facile de déterminer. Soit, en effet,

$$\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x+1} + \ldots + \frac{a_n}{x+n};$$

si l'on chasse les dénominateurs, puis que dans l'égalité obtenue on fasse x égal successivement à $0, -1, -2, \ldots, -n$, on trouve

$$a_0 = \frac{1}{1.2\ldots n}, \quad a_1 = -\frac{1}{1}\,\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}, \quad a_2 = \frac{1}{1.2}\,\frac{1}{1.2\ldots(n-2)}, \quad \ldots,$$

par suite

$$\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{x} - \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\,\frac{1}{1}\,\frac{1}{x+1} \\ + \frac{1}{1.2\ldots(n-2)}\,\frac{1}{1.2}\,\frac{1}{x+2} - \ldots \\ + (-1)^n \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{x+n};$$

cette expression est précisément le terme général du produit des deux séries

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

et

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1.2}\,\frac{1}{x+2} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{x+n} + \ldots;$$

on désigne par $P(x)$ la somme de cette dernière série, et par $Q(x)$ la différence entre $P(x)$ et $\Gamma(x)$, de sorte que

$$P(x) = \frac{1}{e} S(x), \qquad Q(x) = \Gamma(x) - P(x);$$ F(x) = B Γ(x) + Ae

les fonctions $P(x)$ et $Q(x)$ sont les *fonctions de Prym* (1). La

(1) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXXXII, 1877, p. 165-172. L'expression de $Q(x)$ sous forme explicite est compliquée. Hermite [illegible] *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XC, 1881, p. 332-336) [illegible]venu à un développement où figurent plusieurs séries. Mellin (*Acta* [illegible], t. II, 1883, p. 231-232) a fait connaître un autre développement, où n'entre qu'une seule série.

fonction $\Gamma(x)$ se présente alors comme la somme des fonctions $P(x)$ et $Q(x)$, et l'expression générale des fonctions $F(x)$ devient

$$F(x) = (B - Ae)P(x) + BQ(x).$$

La fonction $F(x)$ se réduit à l'une ou à l'autre des fonctions de Prym, suivant que l'on choisit pour les constantes arbitraires A et B les nombres

$$A_1 = -\frac{1}{e}, \qquad B_1 = 0,$$

ou

$$A_2 = \frac{1}{e}, \qquad B_2 = 1;$$

il en résulte que les fonctions $P(x)$ et $Q(x)$ vérifient les relations fonctionnelles

$$P(x+1) = xP(x) - \frac{1}{e}, \qquad Q(x+1) = xQ(x) + \frac{1}{e},$$

et sont telles que les rapports

$$\frac{1}{n^x}\,\frac{P(x+n)}{1.2\ldots(n-1)}, \qquad \frac{1}{n^x}\,\frac{Q(x+n)}{1.2\ldots(n-1)}$$

tendent, pour $n = \infty$, le premier vers zéro, le second vers l'unité.

Enfin on a

$$\begin{aligned} eP(x) = &-1 - (x-1) - (x-1)(x-2) - \ldots - (x-1)\ldots(x-m+1) \\ &+ (x-1)(x-2)\ldots(x-m)eP(x-m), \\ eQ(x) = &\quad 1 + (x-1) + (x-1)(x-2) + \ldots + (x-1)\ldots(x-m+1) \\ &+ (x-1)(x-2)\ldots(x-m)eQ(x-m), \end{aligned}$$

d'où, pour $x = m+1$, l'entier m étant positif,

$$\begin{aligned} eP(m+1) &= -1.2\ldots m - 2.3\ldots m - \ldots - m - 1 - 1.2\ldots me, \\ eQ(m+1) &= 1.2\ldots m + 2.3\ldots m + \ldots + m + 1. \end{aligned}$$

Application. — On vient de voir que, pour toute valeur de x non égale à zéro ou à un entier négatif, on a

$$eP(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \ldots;$$

or,

$$\Gamma(x+n) = x($$

par suite

$$e\frac{P(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\Gamma(x+1)} + \frac{1}{\Gamma(x+2)} + \frac{1}{\Gamma(x+3)} + \cdots.$$

Si l'on représente par $T(x)$ la somme de cette série, en adoptant la notation de Weierstrass, on obtient

$$T(x) = Fc(x+1) + Fc(x+2) + Fc(x+3) + \ldots,$$

d'où

$$T(x) - T(x+1) = Fc(x+1);$$

d'autre part, $T(x+n)$ tend évidemment vers zéro pour $n = \infty$; ce résultat, joint à la relation fonctionnelle précédente, suffit à caractériser la fonction $T(x)$, car des relations

$$\begin{aligned} T(x) - T(x+1) &= Fc(x+1), \\ T(x+1) - T(x+2) &= Fc(x+2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ T(x+n-1) - T(x+n) &= Fc(x+n), \end{aligned}$$

on déduit

$$T(x) - T(x+n) = Fc(x+1) + Fc(x+2) + \ldots + Fc(x+n),$$

d'où, pour $n = \infty$,

$$T(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} Fc(x+n).$$

Fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$.

$\Phi(x) = \frac{d}{dx} \lg \Gamma(x)$
$\Psi(x) = \frac{d^2}{dx^2} \lg \Gamma(x)$

Nous poserons

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \qquad \Psi(x) = \frac{d}{dx}\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad = \frac{d}{dx}\Phi(x)$$

en supposant x autre que zéro ou qu'un entier négatif.

Les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$, que l'on a désignées par les notations les plus diverses, jouent un rôle important dans la théorie de la fonction gamma. C'est ainsi que Hölder ([1]) est parvenu à établir que $\Gamma(x)$ n'était solution d'aucune équation différentielle

([1]) *Mathematische Annalen*, t. XXVIII, 1887, p. 1-13. — La fonction gamma est, parmi les fonctions transcendantes élémentaires, la seule qui présente la particularité dont il est question.

$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{d}{dx} \lg \Gamma(x) = -C + S_2(1+x) - S_3(1+x)^2 + \ldots = -C + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{x}\right)$
$= -C + S_2 x - S_3 x^2 \ldots$

algébrique, en prouvant au préalable que $\Phi(x)$ avait ce caractère. La fonction $\Psi(x)$ ne présente pas moins d'intérêt, car, en partant de son développement en série de fractions simples, on peut retrouver, comme l'a montré Hermite [1], toutes les propriétés de $\Gamma(x)$. Inversement, il est facile de déduire toutes les propriétés de $\Phi(x)$ et de $\Psi(x)$ de celles de $\Gamma(x)$; si l'on prend, en effet, les dérivées logarithmiques des relations

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$$\Gamma(x+m) = x(x+1)\ldots(x+m-1)\Gamma(x),$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{-mx+\frac{1}{2}}\Gamma(mx),$$

on obtient

$$\Phi(x+1) - \Phi(x) = \frac{1}{x},$$

$$\Phi(x+m) - \Phi(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ldots + \frac{1}{x+m-1},$$

$$\Phi(x) - \Phi(1-x) = -\pi \cot \pi x,$$

$$\Phi(x) + \Phi\left(x+\frac{1}{m}\right) + \ldots + \Phi\left(x+\frac{m-1}{m}\right) = m\Phi(mx) - m\log m,$$

et, en dérivant encore une fois,

$$\Psi(x+1) - \Psi(x) = -\frac{1}{x^2},$$

$$\Psi(x+m) - \Psi(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \ldots - \frac{1}{(x+m-1)^2},$$

$$\Psi(x) + \Psi(1-x) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right)^2,$$

$$\Psi(x) + \Psi\left(x+\frac{1}{m}\right) + \ldots + \Psi\left(x+\frac{m-1}{m}\right) = m^2\Psi(mx).$$

Enfin, à toutes ces formules on peut joindre les deux suivantes

$$\Phi^{(n)}(x+1) - \Phi^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{x^{n+1}},$$

$$\frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}\left[\Phi^{(n)}(x+m) - \Phi^{(n)}(x)\right] = \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{(x+p-1)^{n+1}},$$

---

(1) *Faculté des Sciences de Paris.* — *Cours de M. Hermite rédigé en 1882 par M. Andoyer*, 4e éd., p. 140-146.

que l'on trouve en dérivant n fois les deux premières relations relatives à $\Phi(x)$.

Nous avons vu (p. 204) que l'on a formé de nombreuses fonctions semblables à $\Gamma(x)$; on a été amené, par là même, à construire des fonctions analogues à $\Phi(x)$ ou à $\Psi(x)$. Telle est, entre autres, la fonction

$$\varphi(x+1) = \frac{d}{dx}[x\Phi(x+1)],$$

étudiée par Blaserna [1] à propos de recherches optiques, et dont les propriétés rappellent celles de $\Phi(x)$.

Développement de $\Phi(1+x)$ et de $\Psi(1+x)$ en séries entières. — Les fonctions $\Phi(1+x)$ et $\Psi(1+x)$ sont développables en séries entières de rayon de convergence égal à l'unité; en effet, par deux dérivations successives du développement

$$\log\Gamma(1+x) = -\rho\frac{x}{1} + S_2\frac{x^2}{2} - S_3\frac{x^3}{3} + \ldots, \qquad -1 < x \leqq 1,$$

on obtient

$$\Phi(1+x) = -\rho + S_2 x - S_3 x^2 + \ldots, \qquad -1 < x < 1,$$
$$\Psi(1+x) = S_2 - 2S_3 x + 3S_4 x^2 - \ldots, \qquad -1 < x < 1.$$

Gauss [2], dans son Mémoire sur la série hypergéométrique, a donné, d'après les calculs de Nicolai, en même temps que les valeurs de $\log\Gamma(x)$, celles de $\Phi(x)$ de 1 jusqu'à 2, de centième en centième, et avec dix-huit décimales.

Développement de $\Phi(x+1)$ et de $\Psi(x+1)$ en séries de fractions simples. — Si, dans la série entière

$$\Phi(1+x) = -\rho + S_2 x - S_3 x^2 + \ldots,$$

on développe les sommes $S_2, S_3, \ldots$, puis que l'on groupe les termes dont les dénominateurs sont les puissances successives

---

(1) *Memorie della reale Accademia dei Lincei*, 5e série, t. I, 1895, p. 499-557.
(2) *Carl Friedrich Gauss Werke*, t. III, p. 161-162.

d'un même entier, on obtient ainsi les progressions suivantes :

$$\frac{x}{1(x+1)} = \frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{1^3} + \frac{x^3}{1^4} - \ldots,$$
$$\frac{x}{2(x+2)} = \frac{x}{2^2} - \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{2^4} - \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{x}{n(x+n)} = \frac{x}{n^2} - \frac{x^2}{n^3} + \frac{x^3}{n^4} - \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ces séries sont absolument convergentes dans l'intervalle$(-1, +1)$; d'ailleurs, pour une valeur positive de x intérieure à cet intervalle, la série de terme général

$$\frac{x}{n(n-x)} = \frac{x}{n^2} + \frac{x^2}{n^3} + \frac{x^3}{n^4} + \ldots$$

est convergente ; par suite, d'après le théorème des séries de séries,

$$\Phi(x+1) = -\rho + \frac{x}{1(x+1)} + \frac{x}{2(x+2)} + \frac{x}{3(x+3)} + \ldots,$$

ou bien

$$\Phi(x+1) = -\rho + \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x+3}\right) + \ldots.$$

Ce développement était connu d'Euler (¹). Il offre la particularité remarquable que la série des fractions simples qui y figurent devient absolument convergente par l'addition d'une constante à chacune de ces fractions. Ce fait, d'après Weierstrass, a été la première indication qui ait mis sur la voie du théorème de Mittag-Leffler (²).

Le développement de $\Phi(x+1)$ en série de fractions simples subsiste, pour toute valeur de x non égale à un entier négatif; en effet,

$$\Phi(x+2) - \Phi(x+1) = \frac{1}{x+1},$$

(¹) *Institutiones Calculi differentialis*, partie 2, § 384.

(²) *Voir* une lettre adressée par Hermite à Mittag-Leffler et reproduite dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XCII, 1882, p. 145-155.

mais

$$\frac{1}{x+1} = \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) + \ldots,$$

par suite

$$\Phi(x+2) = -C + \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x+4}\right) + \ldots.$$

Ainsi, le développement de $\Phi(x+1)$ reste valable quand on y remplace x par $x+1$; il a donc lieu pour toute valeur positive de x, et l'on verrait pareillement qu'il en est de même pour toute valeur négative de x non entière.

Si maintenant, dans la série

$$\Psi(1+x) = S_2 - 2S_3 x + 3S_4 x^2 - \ldots,$$

on développe les sommes $S_2, S_3, S_4, \ldots$, en rassemblant les termes dont les dénominateurs sont les puissances successives d'un même entier, on forme les séries

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{1^2} - 2\frac{x}{1^3} + 3\frac{x^2}{1^4} - \ldots,$$

$$\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{2^2} - 2\frac{x}{2^3} + 3\frac{x^2}{2^4} - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(x+n)^2} = \frac{1}{n^2} - 2\frac{x}{n^3} + 3\frac{x^2}{n^4} - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et l'on constate sans peine qu'à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$

$$\Psi(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \ldots,$$

développement dû à Gauss (¹); il a lieu pour toute valeur de x non égale à un entier négatif, car

$$\Psi(x+2) - \Psi(x+1) = -\frac{1}{(x+1)^2},$$

d'où

$$\Psi(x+2) = \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \ldots;$$

(¹) *Carl Friedrich Gauss Werke*, t. III, p. 155.

on en conclut que le développement de $\Psi(x)$ reste valable pour toute valeur positive de x; on établirait de la même manière qu'il subsiste pour toute valeur négative de x non entière.

Limite de l'expression $\log n - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ldots + \frac{1}{x+n-1}\right)$ **pour** $n = \infty$. — La série

$$\Phi(x) = -\rho + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x+2}\right) + \ldots$$

peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \rho\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ldots + \frac{1}{x+n-1}\right) + R_n,$$

en désignant par R_n le reste; or, si l'on pose

$$\rho_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n,$$

la série précédente devient

$$\Phi(x) = \rho_n - \rho + \log n - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ldots + \frac{1}{x+n-1}\right) + R_n;$$

on en conclut que $\Phi(x)$ est la limite, pour $n = \infty$, de l'expression

$$\Phi(x) = \lim \left[\log n - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ldots + \frac{1}{x+n-1}\right)\right], \quad n = \infty$$

résultat qui pourrait servir à définir $\Phi(x)$ (¹). En particulier, pour $x = 1$, on a

$$\rho = -\Phi(1).$$

Développement de la différence $\Phi(x+a) - \Phi(x)$. — De la formule

$$\Phi(x) = -\rho + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x+2}\right) + \ldots,$$

on déduit que la différence

$$\Phi(x) - \Phi(x+a)$$

(¹) *Voir* un Mémoire publié par Eduard Weyr da[illegible] *pěstování mathematiky a fysiky*, t. XXI, 1892, p. 151-166.

est égale à

$$\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x-a+1}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x-a+2}-\frac{1}{x+2}\right)+\ldots,$$

développement qui est susceptible d'être transformé de deux façons différentes.

Si l'on suppose d'abord l'inégalité

$$|a|<|x+n|,$$

vérifiée à partir de $n=0$, les termes peuvent être considérés comme les sommes de séries entières absolument convergentes telles que

$$u_n=\frac{a}{(x+n)^2}+\frac{a^2}{(x+n)^3}+\frac{a^3}{(x+n)^4}+\ldots \quad = \frac{\frac{a}{(x+n)^2}}{1-\frac{a}{x+n}} = \frac{a}{x+n}-\frac{1}{x+n-a}$$

Or, soient r la valeur absolue de x, s celle de a, et m l'entier immédiatement supérieur à $r+s$; à partir de $n=m$, on a

$$\sum_{p=1}^{p=\infty}\left|\frac{a^p}{(x+n)^{p+1}}\right| \leqq \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{s^p}{(n-r)^{p+1}},$$

ou, en désignant par U_n le premier membre,

$$U_n \leqq \frac{1}{n-r-s}-\frac{1}{n-r};$$

il résulte de là que la série de terme général U_n est convergente, puisque, à partir de $n=m$, ses termes sont inférieurs ou égaux à ceux de la série positive convergente

$$\Phi(m-r)-\Phi(m-r-s)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{1}{m-r-s+n}-\frac{1}{m-r+n}\right);$$

on peut donc, d'après le théorème des séries de séries, sommer par colonnes les développements

$$u_0=\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^3}{x^4}+\ldots,$$

$$u_1=\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{a^2}{(x+1)^3}+\frac{a^3}{(x+1)^4}+\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_n=\frac{a}{(x+n)^2}+\frac{a^2}{(x+n)^3}+\frac{a^3}{(x+n)^4}+\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

par suite



$$\Phi(x)-\Phi(x-a)=a\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(x+n)^2}+a^2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(x+n)^3}+a^3\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(x+n)^4}+\ldots,$$

ou, en remplaçant a par $-a$,

$$\Phi(x+a)-\Phi(x)=a\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(x+n)^2}-a^2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(x+n)^3}+a^3\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(x+n)^4}-\ldots.$$

Cette série, considérée par Gauss (¹), est valable si l'on suppose la valeur absolue de a inférieure à la plus petite des valeurs absolues des nombres x, $x+1$, $x+2$, ..., $x+n$, ...

Si, maintenant, on suppose positive la différence $x-a$, les termes de la série

$$\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x-a+1}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x-a+2}-\frac{1}{x+2}\right)+\ldots$$

sont développables en séries absolument convergentes (p. 209-210) telles que

$$\frac{1}{x-a+n}-\frac{1}{x+n}=v_n=\frac{a}{(x+n)(x+n+1)}+\frac{a(a+1)}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)}+\ldots;$$

d'ailleurs, soient encore r la valeur absolue de x, s celle de a, et m l'entier immédiatement supérieur à $r+s$; à partir de $n=m$, l'inégalité

$$\sum_{p=1}^{p=\infty}\left|\frac{a(a+1)\ldots(a+p-1)}{(x+n)(x+n+1)\ldots(x+n+p)}\right|<\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{s(s+1)\ldots(s+p-1)}{(n-r)(n-r+1)\ldots(n-r+p)}$$

est satisfaite, d'où, en représentant par V_n la première somme,

$$V_n<\frac{1}{n-r-s}-\frac{1}{n-r};$$

on en conclut, comme précédemment, que l'on peut sommer par

(¹) *Carl Friedrich Gauss Werke*, t. III, p. 153.

colonnes les séries

$$v_0 = \frac{a}{x(x+1)} + \frac{a(a+1)}{x(x+1)(x+2)} + \dots,$$

$$v_1 = \frac{a}{(x+1)(x+2)} + \frac{a(a+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_n = \frac{a}{(x+n)(x+n+1)} + \frac{a(a+1)}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)} + \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

mais la série

$$\frac{1}{x(x+1)\dots(x+p)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+p+1)} + \dots$$

a pour somme

$$\frac{1}{p}\,\frac{1}{x(x+1)\dots(x+p-1)},$$

par conséquent

$$\Phi(x) - \Phi(x-a) = \frac{a}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{a(a+1)}{x(x+1)} + \frac{1}{3}\,\frac{a(a+1)(a+2)}{x(x+1)(x+2)} + \dots,$$

ou bien, en changeant le signe de a,

$$\Phi(x+a) - \Phi(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{a(a-1)}{x(x+1)} + \frac{1}{3}\,\frac{a(a-1)(a-2)}{x(x+1)(x+2)} - \dots,$$

la somme $x+a$ étant positive.

En particulier, si a est égal à un entier m, cette formule devient

$$\Phi(x+m) - \Phi(x) = \frac{m}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{m(m-1)}{x(x+1)} + \frac{1}{3}\,\frac{m(m-1)(m-2)}{x(x+1)(x+2)} - \dots,$$

d'où l'identité

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \dots + \frac{1}{x+m-1}$$
$$= \frac{m}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{m(m-1)}{x(x+1)} + \frac{1}{3}\,\frac{m(m-1)(m-2)}{x(x+1)(x+2)} - \dots,$$

qui, pour $x=1$, se réduit à la suivante :

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} = \frac{m}{1} - \frac{1}{2}\,\frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{1}{3}\,\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} - \dots,$$

n due à Jean Bernoulli.

Si l'on égale les deux développements dans lesquels on a successivement transformé la série

$$\Phi(x) - \Phi(x-a),$$

on trouve

$$a\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(x+n)^2} - a^2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(x+n)^3} + a^3\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(x+n)^4} + \ldots$$

$$= \frac{a}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{a(a+1)}{x(x+1)} + \frac{1}{3}\,\frac{a(a+1)(a+2)}{x(x+1)(x+2)} + \ldots$$

identité très remarquable que Binet (¹) a utilisée dans son Mémoire sur les intégrales eulériennes; pour qu'elle soit valable, il faut que x soit positif et supérieur à la valeur absolue de a.

L'identité précédente donne, lorsqu'on identifie les coefficients de a dans les deux membres,

$$\Psi(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{3}\,\frac{1.2}{x(x+1)(x+2)} + \ldots,$$

en admettant que x soit positif. Cette série a été étudiée par Bauer (²).

Détermination de $\Phi(x)$ pour une valeur rationnelle de x. — La fonction $\Phi(x)$ est susceptible d'être mise sous forme finie toutes les fois que x est un nombre rationnel. On l'établit de la manière suivante, au moyen d'une méthode extrêmement ingénieuse qui a été indiquée par Gauss (³).

Si l'on suppose d'abord le nombre rationnel x extérieur à l'intervalle $(0, 1)$, en désignant par m l'entier positif immédiatement inférieur à x ou supérieur à $-x$ suivant que x est positif ou

(¹) *Journal de l'École royale polytechnique*, 27ᵉ cahier, t. XVI, 1839, p. 231 et p. 255.

(²) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LVII, 1860, p. 256-272.

(³) *Carl Friedrich Gauss Werke*, t. III, p. 155-157. Un autre procédé, plus rapide, a été donné par Jensen (*Nyt Tidsskrift for Mathematik*, t. II B, 1891, p. 52-54).

$\xi\,\Gamma(\frac{1}{2}) = \xi$

$\xi\,\Gamma(1) = \xi$

$\xi\,\Gamma(2) = \xi$

$\xi\,\Gamma(\frac{3}{2}) = \xi$

$\xi\,\Gamma(3) = \xi$

$\xi\,\sqrt{2} =$

$\varphi(2) = 1$

Кит

Принята отъ

въ .... час.

По проводу

Принялъ

Разрядъ

Г. Начальник

Къ 6 час. веч

Зак. 1918 г., 2800×300.
Сер. Экспл. № 57.

Тип. Кит. Вост. жел. дор. № 2475.

Прибы | Убыло | Четна напр. | Нечет. | ...

1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7

Крытые . . . . .

Платформы. . . .

Полувагоны . .

Дровяные и [illegible]

Теплуш., врем. [illegible] подъ [illegible]

Ледники . . . . .

Цистерны . . . . .

Спиртовыя [illegible] чужихъ [illegible]

Пороховые . . .

Теплушка . . . . .

Проч. [illegible]

[illegible]

НАЛИЧІЕ:

[illegible]

[illegible]

[illegible]

égatif, les deux formules

$$\Phi(x) = \Phi(x-m) + \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ldots + \frac{1}{x-m}\right),$$

$$\Phi(x) = \Phi(x+m) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ldots + \frac{1}{x+m-1}\right)$$

montrent que le calcul de $\Phi(x)$, pour une valeur rationnelle quelconque de x, peut toujours être ramené au calcul de $\Phi(x)$ pour une valeur rationnelle de x comprise entre 0 et 1.

Soit donc

$$x = \frac{p}{q},$$

l'entier p étant moindre que l'entier q. On a vu que $\Phi(x)$ peut se mettre sous la forme

$$\Phi(x) = \rho_n - \rho + \log n - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ldots + \frac{1}{x+n-1}\right) + R_n,$$

mais

$$\log n = \log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \ldots + \log\frac{n}{n-1},$$

par suite

$$\Phi(x) = -\frac{1}{x} + \log\frac{2}{1} - \frac{1}{x+1} + \log\frac{3}{2} - \frac{1}{x+2} + \log\frac{4}{3} - \ldots,$$

et, en y remplaçant x successivement par les fractions $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q}{q}$, on tire de cette égalité

$$\Phi\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{q}{1} + \log\frac{2}{1} - \frac{q}{q+1} + \log\frac{3}{2} - \frac{q}{2q+1} + \log\frac{4}{3} - \ldots,$$

$$\Phi\left(\frac{2}{q}\right) = -\frac{q}{2} + \log\frac{2}{1} - \frac{q}{q+2} + \log\frac{3}{2} - \frac{q}{2q+2} + \log\frac{4}{3} - \ldots,$$

. . . . ,

$$\Phi\left(\frac{q}{q}\right) = -\frac{q}{q} + \log\frac{2}{1} - \frac{q}{2q} + \log\frac{3}{2} - \frac{q}{3q} + \log\frac{4}{3} - \ldots.$$

D'autre part, si l'on pose

$$\omega = \frac{2\pi}{q},$$

en représentant par φ l'un quelconque des angles

$$\omega,\quad 2\omega,\quad \ldots,\quad (q-1)\omega,$$

on vérifie sans peine les relations

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \cos(q+1)\varphi = \cos(2q+1)\varphi = \ldots,\\
\cos 2\varphi &= \cos(q+2)\varphi = \cos(2q+2)\varphi = \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
1 = \cos q\varphi &= \cos 2q\varphi = \cos 3q\varphi = \ldots,
\end{aligned}$$

ainsi que la suivante :

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos q\varphi = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\cos\varphi\,\Phi\left(\frac{1}{q}\right) &= -\frac{q}{1}\cos\varphi + \cos\varphi\log\frac{2}{1} - \frac{q}{q+1}\cos(q+1)\varphi + \cos\varphi\log\frac{3}{2} - \ldots\\
\cos 2\varphi\,\Phi\left(\frac{2}{q}\right) &= -\frac{q}{2}\cos 2\varphi + \cos 2\varphi\log\frac{2}{1} - \frac{q}{q+2}\cos(q+2)\varphi + \cos 2\varphi\log\frac{3}{2} - \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\cos q\varphi\,\Phi\left(\frac{q}{q}\right) &= -\frac{q}{q}\cos q\varphi + \cos q\varphi\log\frac{2}{1} - \frac{q}{2q}\cos 2q\varphi + \cos q\varphi\log\frac{3}{2} - \ldots
\end{aligned}$$

d'où, par addition,

$$\begin{aligned}
&\cos\varphi\,\Phi\left(\frac{1}{q}\right) + \cos 2\varphi\,\Phi\left(\frac{2}{q}\right) + \ldots + \cos q\varphi\,\Phi\left(\frac{q}{q}\right)\\
&\qquad = -q\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \ldots\right),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire (p. 178)

$$\cos\varphi\,\Phi\left(\frac{1}{q}\right) + \cos 2\varphi\,\Phi\left(\frac{2}{q}\right) + \ldots + \cos q\varphi\,\Phi\left(\frac{q}{q}\right) = \frac{q}{2}\log(2 - 2\cos\varphi).$$

Si l'on considère à présent la somme

$$\cos p\omega\cos r\omega + \cos 2p\omega\cos 2r\omega + \ldots + \cos qp\omega\cos qr\omega,$$

où r est l'un quelconque des nombres $1, 2, 3, \ldots, q$, on constate que cette somme est nulle pour toutes les valeurs de r autres que p et $q-p$, ces dernières valeurs la rendant égale à $\frac{q}{2}$; en effet, elle a pour expression

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sin q\dfrac{p+r}{2}\omega\cos(q+1)\dfrac{p+r}{2}\omega}{\sin\dfrac{p+r}{2}\omega} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin q\dfrac{p-r}{2}\omega\cos(q+1)\dfrac{p-r}{2}\omega}{\sin\dfrac{p-r}{2}\omega}.$$

Alors, si, dans la relation finale qui a été établie entre les nombres $\Phi\left(\frac{1}{q}\right)$, $\Phi\left(\frac{2}{q}\right)$, ..., $\Phi\left(\frac{q}{q}\right)$, on donne à φ successivement les valeurs ω, 2ω, ..., $(q-1)\omega$, en multipliant les équations formées de cette manière par $\cos p\omega$, $\cos 2p\omega$, ..., $\cos(q-1)p\omega$, et les ajoutant à la relation

$$\Phi\left(\frac{1}{q}\right)+\Phi\left(\frac{2}{q}\right)+\ldots+\Phi\left(\frac{q}{q}\right)=q\,\Phi(1)-q\log q,$$

on trouve

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{q-p}{q}\right)+\Phi\left(\frac{p}{q}\right) &= 2\Phi(1)-2\log q+\cos p\omega\log(2-2\cos\omega)\\ &\quad+\cos 2p\omega\log(2-2\cos 2\omega)+\ldots\\ &\quad+\cos(q-1)p\omega\log[2-2\cos(q-1)\omega];\end{aligned}$$

les deux premiers termes étant mis à part, les termes également distants des extrêmes sont deux à deux égaux, et, dans le cas où q est pair, le terme du milieu est

$$\cos p\frac{q\omega}{2}\log\left(2-2\cos\frac{q\omega}{2}\right);$$

il a pour valeur $2\log 2$ ou $-2\log 2$, suivant que p est pair ou impair.

Enfin, d'après la relation des compléments,

$$\Phi\left(\frac{q-p}{q}\right)-\Phi\left(\frac{p}{q}\right)=\pi\cot\frac{p}{q}\pi;$$

on en conclut que, pour une valeur impaire de q, on a

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{p}{q}\right) &= \Phi(1)-\frac{\pi}{2}\cot\frac{p}{q}\pi-\log q+\cos 2\frac{p}{q}\pi\log\left(2-2\cos\frac{2\pi}{q}\right)+\ldots\\ &\quad+\cos(q-1)\frac{p}{q}\pi\log\left(2-2\cos\frac{q-1}{q}\pi\right),\end{aligned}$$

et, pour une valeur paire,

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{p}{q}\right) &= \Phi(1)-\frac{\pi}{2}\cot\frac{p}{q}\pi-\log q+\cos 2\frac{p}{q}\pi\log\left(2-2\cos\frac{2\pi}{q}\right)+\ldots\\ &\quad+\cos(q-2)\frac{p}{q}\pi\log\left(2-2\cos\frac{q-2}{q}\pi\right)+(-1)^p\log 2.\end{aligned}$$

Telles sont les formules qui permettent d'exprimer $\Phi(x)$ sous forme finie pour toute valeur rationnelle de x non égale à un entier négatif.

Étude de l'équation $\Phi(x) = 0$. — On a

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(x+n)(x_0+n)}.$$

Les termes du second membre sont tous positifs si les nombres x et x_0 appartiennent simultanément à l'un quelconque des intervalles

$$(0, +\infty), \quad (-1, 0), \quad (-2, -1), \quad \ldots,$$

et, comme

$$\Phi(+\infty) = +\infty, \qquad \Phi(-n-0) = +\infty, \qquad \Phi(-n+0) = -\infty,$$

on en conclut que, dans chacun des intervalles considérés, quand la variable x croît de la limite inférieure à la limite supérieure, la fonction $\Phi(x)$ augmente constamment de $-\infty$ à $+\infty$ et, par suite, s'annule une fois et une seule. Ainsi $\Phi(x)$ possède une racine positive et une infinité de racines négatives comprises respectivement entre 0 et -1, -1 et -2, ...

La racine positive appartient à l'intervalle (1, 2), car

$$\Phi(1) = -\rho, \qquad \Phi(2) = 1 - \rho,$$

résultats dont le premier est négatif, et le second positif. Legendre (¹) et Gauss (²) ont calculé la valeur de cette racine qui, limitée à sept décimales, est

$$x = 1,4616321\ldots,$$

alors

$$\Gamma(x) = 0,8856024\ldots;$$

c'est le seul minimum de la fonction $\Gamma(x)$ dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

Soit maintenant $-n+h$ la racine négative de $\Phi(x)$ comprise dans l'intervalle $(-n, -n+1)$. Si, dans la relation

$$\Phi(x) - \Phi(1-x) = -\pi \cot \pi x,$$

(¹) *Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, 1809, p. 490. — *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 435-436.

(²) *Carl Friedrich Gauss Werke*, t. III, p. 147.

on fait $x = -n + h$, on obtient

$$\Phi(n+1-h) = \pi \cot \pi h;$$

mais

$$\Phi(n+1-h) - \Phi(1-h) = \frac{1}{1-h} + \frac{1}{2-h} + \ldots + \frac{1}{n-h},$$

et, comme la différence

$$\Phi(1-h) - \left[\log n - \left(\frac{1}{1-h} + \frac{1}{2-h} + \ldots + \frac{1}{n-h}\right)\right]$$

s'annule pour $n = \infty$, on peut poser

$$\Phi(n+1-h) - \log n = \varepsilon,$$

le nombre ε tendant vers zéro quand n devient infini; ainsi

$$h = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\varepsilon + \log n},$$

ou bien approximativement, si n est assez grand,

$$h = \frac{1}{\log n};$$

dans cette hypothèse, la racine considérée ayant pour expression

$$x = -n + \frac{1}{\log n},$$

il en résulte que les racines se rapprochent de plus en plus des valeurs qui rendent la fonction infinie à mesure que celles-ci s'éloignent de zéro. C'est à Hermite [1] que l'on doit ce résultat.

Application. Courbe figurative de la fonction gamma. — Soit

$$y = \Gamma(x).$$

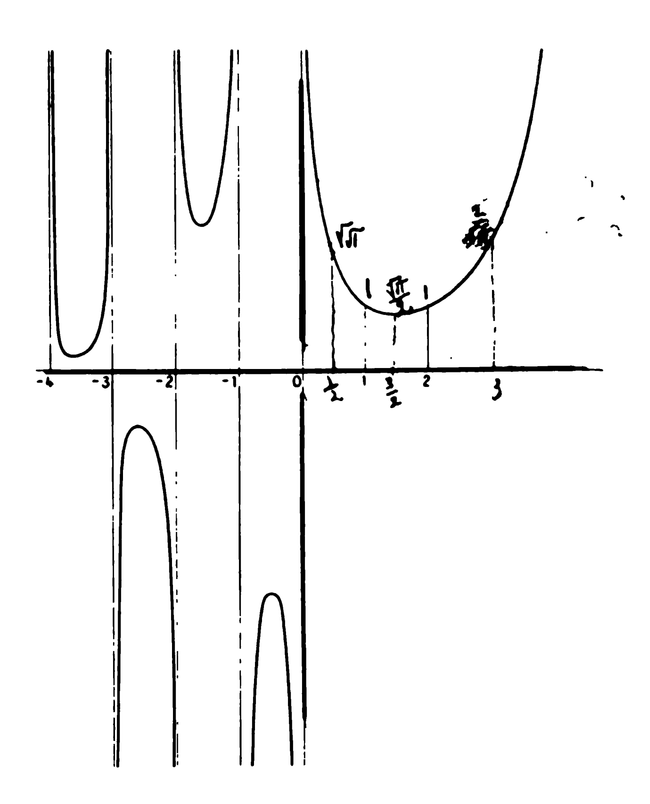
Lorsque x varie de 0 à $+\infty$, la fonction $\Gamma(x)$ varie de $+\infty$ à $+\infty$ sans s'annuler et, pour une valeur de la variable com-

---

[1] *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XC, 1881, p. 336-338.

prise entre 1 et 2, passe par un minimum qui vient d'être déterminé.

Lorsque x varie de 0 à $-\infty$, si l'on considère les intervalles successifs $(-1, 0)$, $(-2, -1)$, $(-3, -2)$, ..., la fonction $\Gamma(x)$ est alternativement négative et positive dans chacun de ces intervalles et devient infinie aux extrémités.



Au moyen des tables, et en se servant de la relation

$$\Gamma(-x) = -\frac{1}{x}\Gamma(1-x)$$

pour les valeurs négatives de x, il est facile de construire la courbe par points ; on obtient ainsi la figure ci-dessus.

A mesure que x s'écarte de l'origine dans le sens négatif, les points de la courbe correspondant à des maximums et à des mini-

mums se rapprochent de plus en plus de l'axe horizontal et de l'asymptote verticale la plus éloignée de l'origine [1].

EXERCICES.

1° Soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

une série entière à coefficients positifs; l'exposant p étant positif, si l'expression $n^{1-p} a_n$ a une limite λ pour $n = \infty$, le produit

$$(1-x)^p f(x)$$

tend vers la limite $\lambda \Gamma(p)$ quand la variable x s'approche de l'unité en lui restant toujours inférieure.

APPELL.

Chercher la limite à gauche, pour $x = 1$, du produit

$$(1-x)^p (1^{p-1} x + 2^{p-1} x^2 + 3^{p-1} x^3 + \ldots).$$

E. PICARD.

2° Le nombre p étant positif, faire voir que la somme de la série de terme général $n^p x^n$ est de la forme

$$\frac{\lambda}{(1-x)^{p+1}},$$

le coefficient λ restant fini pour $x = 1$.

E. CAHEN.

3° Si $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ désigne la somme de la série hypergéométrique, on a

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)\, F(-\alpha, \beta, \gamma - \alpha, 1) = 1,$$
$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)\, F(\alpha, -\beta, \gamma - \beta, 1) = 1.$$

GAUSS.

4° Sommer la série

$$1 + \left[\frac{n}{1}\right]^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 + \ldots,$$

formée avec les carrés des coefficients de la série binomiale.

LAGRANGE.

---

[1] C'est Euler qui, le premier, a étudié la courbe $y = \Gamma(x)$ (*Novi Commentarii Academiae Scientiarum imperialis petropolitanae*, t. XIII, 1768, p. 3-66).

5° L'expression

$$\frac{2.4.6\ldots(2mn-2)}{1.3.5\ldots(2mn-1)}\cdot\frac{m.3m.5m\ldots(2n-1)m}{2m.4m.6m\ldots(2n-2)m},$$

où m est un entier, tend vers $\sqrt{m}$ quand n croît indéfiniment.

SCHAAR.

6° Quelle est la *valeur moyenne géométrique* de la fonction $\Gamma(x)$ dans l'intervalle $(x, x+1)$, la variable x étant positive, ou, autrement dit, quelle est la limite, pour $n=\infty$, du radical

$$\sqrt[n]{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}.$$

RAABE.

7° La série positive de terme général $\frac{P(n)}{Q(n)}$ est-elle convergente?

8° Déterminer la forme générale des fonctions $f(x)$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$f(x-1)-(x+1)f(x)+xf(x-1)=0,$$

et telles que la limite de $f(x+n)$, pour $n=\infty$, soit nulle.

9° Calculer la limite du produit infini

$$\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1+\frac{a}{x+n}\right)e^{-\frac{a}{x+n}}.$$

MELLIN.

10° Trouver la somme de la série

$$\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+m-1)}+\frac{1}{(x+m)(x+m+1)\ldots(x+2m-1)}+\ldots\ldots$$

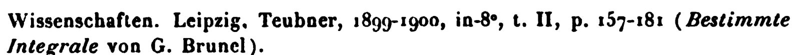
GLAISHER.

BIBLIOGRAPHIE.

BERTRAND (J.), Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral. Paris, Gauthier-Villars, 1870, in-4°, t. II, p. 240-290.

BRUNEL (G.), Monographie de la fonction gamma (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 3e série, t. III, 1886, p. 1-184).

BURKHARDT (Heinr.) et MEYER (W.-Franz), Encyklopädie der mathematischen



Wissenschaften. Leipzig, Teubner, 1899-1900, in-8°, t. II, p. 157-181 (*Bestimmte Integrale* von G. Brunel).

GODEFROY (Maurice), La fonction gamma; théorie, histoire, bibliographie. Paris, Gauthier-Villars, 1901, in-8°.

HERMITE, Faculté des Sciences de Paris. — Cours de M. Hermite rédigé en 1882 par M. Andoyer, 4° éd. Paris, Hermann, 1891, in-4° lith., p. 125-154.

JENSEN (J.-L.-W.-V.), Gammafunktionens Theori i elementaer Fremstilling (*Nyt Tidsskrift for Mathematik*, t. II B, 1891, p. 33-56, 57-72, 83-85).

SERRET (J.-A.), Cours de Calcul différentiel et intégral, 5° éd. Paris, Gauthier-Villars, 1900, in-8°, t. II, p. 165-228.

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \left[t - \frac{1}{1!}\cdot\frac{t^3}{3} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{t^5}{5} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{t^7}{7} + \cdots\right]_0^x = x - \frac{1}{1!}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$

рядъ сходящійся.

TABLE MÉTHODIQUE.

I.

LIMITES.

II.

SÉRIES A TERMES CONSTANTS.

Séries alternées.

Séries absolument convergentes.

III.

SÉRIES A TERMES VARIABLES.

Séries entières.

IV.

FONCTION EXPONENTIELLE.

Logarithmes.

V.

FONCTIONS CIRCULAIRES.

Fonctions circulaires inverses.

Fonctions hyperboliques.

VI.

FONCTION GAMMA.

Fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$.



TABLE ALPHABÉTIQUE.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

J.

O.

P.

Q.

R.

S.

FIN DES TABLES.

[illegible] Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

119

p. 168

